О МЕТОДИЧЕСКИХ И НАУЧНЫХ ПРИНЦИПАХ СОЗДАНИЯ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ СЕРИИ “МГУ-школе”

I. ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ (5-6 классы)

К.А. Лебедев

e-mail: klebedev.ya@yandex.ru

Кубанский государственный университет, Краснодар

Аннотация: Рассмотрены методические и научные предпосылки (принципы, методы), лежащие в основе учебников “МГУ-школе”.

Ключевые слова: математическое образование, учебник математики, методические принципы, научные принципы.

Введение

В настоящее время сложилась весьма нездоровая и критическая ситуация с преподаванием математики во всем мире. Это ощущают на себе классические университеты, высшие учебные заведения, куда приходят малоподготовленные школьники.

В России имеется “Концепция развития математического образования в Российской Федерации”, утверждённая правительством Российской Федерации от 24 декабря 2013 №2506-р. В ней, в частности, сказано, что “Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики…” [1].

Критичность положения с математическим образованием отмечалась и в США. В 2000 г. была создана специальная комиссия по проблемам школьного образования. Комиссия составила доклад президенту Соединённых Штатов под названием «Пока ещё не слишком поздно » («Before It Is Too Late», John Glenn’s National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century, September 27, 2000). [2]. В докладе, в частности, говорится: «Комиссия убеждена, что на заре нового столетия и тысячелетия будущее благосостояние нашего государства зависит не только от того, насколько мы хорошо обучаем детей в целом, но и от того, насколько мы качественно обучаем естественным, фундаментальным наукам и, в частности, математике …».

Качественное обучение “обусловлено качеством многих других его составляющих – учебников, учебных планов, программ, их согласованностью с возможностями усвоения учащимися, качеством подготовки учителей, компетентностью управленцев от образования. Весьма важными являются: количество отведённого учебного времени, качество методического обеспечения учебного процесса, возможности его совершенствования и пр. Влияют на качество образования и качества обучаемого «человеческого материала», как сегодня принято выражаться, которые вырабатываются современной жизнью во всех её проявлениях» [3, с. 7].

В мире предпринимаются разные попытки исправить ситуацию. Например, повышение профессионального уровня учителей математики занимаются лучшие университеты Америки [4].

Другое решение. Совершенно уникальные усилия предпринял университет Беркли, где создан кружок, в котором учат математике с 6 лет, на протяжении 12 лет и готовят для себя кадры при самом университете. Ведут занятия профессора университета [5]. Интересно отметить, что книги А. П. Киселёва переведены на английский язык и ссылки находятся на этом сайте.

Американская транснациональная компания "Боинг" оказывает поддержку Московскому центру непрерывного математического образования уже в четвёртый раз: общая сумма составила сто тысяч долларов. Естественно, сразу возникает вопрос: зачем им это нужно? Дело в том, что "Боинг" постоянно набирает по всему миру множество высококвалифицированных рабочих, инженеров, учёных с очень хорошим образованием. В процессе этого набора американцы отметили общее падение уровня образования в мире, в частности, естественно научных дисциплин и, в особенности, математики. А так как около полутора тысяч российских инженеров работают сегодня по программам сотрудничества с компанией "Боинг", корпорация оказалась заинтересованной в поддержании высокого уровня нашего математического образования [6]. Правда, частный капитал, как известно, ограничен видением только ближайших своих проблем и не может решить глобально проблему образования. Это под силу только государству.

Особая роль в повышении качества обучения и качества знаний учащихся принадлежит учебнику. Процитируем ещё раз И.П. Костенко: «часто слышится мнение, что учитель – более важный фактор обучения, нежели учебник. Мнение, по меньшей мере, поверхностное. Бесспорно, что хороший учитель оказывает сильнейшее благотворное психологическое влияние на учащихся, стимулируя их мотивацию и организовывая познавательный процесс. Но хороший учебник влияет и на учащихся, и на учителя. Он даёт в руки учителя педагогически организованную систему учебного предмета, методически проработанную и выверенную длительным опытом многих поколений учителей. Тем самым он избавляет учителя от многих ошибок и вооружает правильной методикой преподавания. Это особенно важно для массовой школы, ибо хороший учебник массово поднимает среднего учителя до хорошего. Но главная функция учебника другая. Хороший, доступный учащимся учебник позволяет им самостоятельно добывать знания и осмысливать их. Если же такие учебники сопровождают все годы учения, то их влияние на становление мышления детей неоценимо. И эту функцию учебника не может заменить никакой хороший учитель. За долгую историю педагогики её лучшими представителями было понято, что “хороший учебник – фундамент (!) хорошего преподавания” (К. Д. Ушинский). С хорошим учебником и средний учитель будет иметь хорошие результаты» [3, с. 452].

Для того чтобы учебник был хорошим, он должен удовлетворять ряду принципов, многие из которых хорошо известны, но забыты. Например, знаменитый учебник А. П. Киселёва, по его же словам, удовлетворял трём качествам: точность в формулировках при установлении понятий, простота в рассуждениях, сжатость в изложении. Стоит сравнить этот учебник с современными учебниками, без всякой меры искусственно раздутых по объёму, совершенно ненужной, преждевременной по возрасту, трудной информацией и непосильными требованиями к неокрепшему интеллекту учащегося. Учебники перегружены информацией, которую не способен переработать никакой ученик.

Точности в формулировках сейчас не добиваются, это не модно, добиваются логической строгости, высокого теоретического уровня. Однако педагогика давно установила, что стремление к “высокому” теоретическому уровню в школьных учебниках, приводит к глубокому, внутреннему конфликту с **понятностью** обучения. А. П. Киселёв разрешил это противоречие путём смещения центра тяжести с высокого теоретического уровня на точность, простоту, наглядность и убедительность рассуждений для ученика, при этом, не греша против научности.

Пристальное рассмотрение его методических приёмов может поставить ему в упрёк нарушение принципа высокого теоретического уровня. Это так называемый печально известный “принцип ВТУ”, упорно внедряемый в школы многими десятилетиями и, причём крупными математиками. А. П. Киселёв сумел, не смущаясь этим, мастерски пожертвовать высоким теоретическим уровнем ради простоты и удобства ученика.

В данной статье речь идёт об учебниках МГУ-школе. Авторы учебников (С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин) следуют в русле классических методов, характерных для русской школы, придерживаясь принципов понятности, убедительности для ученика. Предмет излагается в соответствии с возрастными ограничениями и так, как устроена математика, основываясь на её внутренней логике и на объективном строении математического знания, раздел за разделом, что позволяет избежать ненужных повторов, сделать изложение даже сложных вопросов, простым и понятным для учащихся [7]. Вместе с тем учитываются особенности возрастной психологии.

Авторы являются сторонниками традиционного российского (советского) образования, нацеленного на формирование и развитие творческой личности . Они не поддерживают стремления формировать грамотного потребителя того, что создано на Западе, стремления не учить, а “развивать”, образовывать учащихся, оказывать им образовательные услуги.

Концепция, состоящая в примате развития над обучением имеет давнюю историю. По меньшей мере, ещё немецкий педагог А.Н. Нимейр (1754-1828) разработал систему упражнений для развития способности мыслить. В России сторонником этой концепции был А.Г. Ободовский (1796-1852). “В дальнейшем эта концепция неоднократно возвращалась в массовую школу, не принося, однако, ей ощутимой пользы, а нередко принося ощутимый вред” [7].

Рассмотрим методические и научные принципы, заложенные в учебники математики для 5-6 классов [8], алгебры для 7-9 классов [9], алгебры и начал математического анализа для 10-11 классов [10]. В данной статье речь идёт о 5-6 классах.

Методические принципы

Принцип 1. Математика едина и может быть изложена в одном учебнике для работы по разным программам.

Математика едина – это можно рассматривать с разных точек зрения, с точки зрения самой математики, её природы, строения, с точки зрения теории познания, с точки зрения философской теории познания. Мы здесь не можем касаться всех сторон этого непростого суждения, но скажем, что математику делает единой то, что как никакая другая дисциплина, она имеет единообразный метод исследования, единый предмет изучения, не может быть строго разделена на части: чистую и прикладную, хотя это и не означает тождества этих частей.

Знания, сообщаемые учащимся, располагаются в определённой системе и строгой последовательности. Система и последовательность не придумываются методистами, а вырабатываются длительной практикой обучения. В математических школах при МГУ многие годы ведётся обучение по данным учебникам, которые аккумулировали методику обучения за достаточно долгий период времени.

Принцип 2. Содержание учебника должно соответствовать научной точке зрения на изучаемые вопросы.

Это очень тонкое требование, трудно выполнимое. Как хорошо понятно большинству здравомыслящих педагогов, строгое изложение математики научным способом в школе невозможно. Как хорошо сказал академик Л. Д. Кудрявцев, в основе должно лежать требование разумной строгости в духе А. П. Киселёва. Киселёв был в курсе научных достижений своего времени, его учебники отвечали научной точке зрения на математику, однако, в своих учебниках он ни в коей мере не стремился к высокому теоретическому уровню.

“Предельная современная научность, как её в настоящий момент понимают математики, не может быть осуществлена в школьном курсе. Принцип ВТУ является вредным, оторванным от действительности, недостижимым, нереальным пожеланием” [3]. Строгая аксиоматическая научность требует применения таких средств, которые не могут быть поняты учащимися на каждой ступени школьного развития.

В учебниках серии "МГУ-школе", найдено педагогически грамотное оптимальное решение: не противореча научности, с научной чёткостью, но вместе с тем доступно, излагается материал в русле лучших классических учебников прошлого.

Научная сторона проявляется также и в том, что школьная математика – это определённая последовательность разделов. В основе последовательности лежит расширение понятия числового множества замкнутого относительно некоторых операций. Это известная последовательность вложенных одна в другую числовых множеств $N \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, которая обсуждается ниже. В упорядочении разделов в учебнике математике, таким образом, явно прослеживается организующая роль теории. В теории чисел совокупность рассматриваемых операций задаёт и разделы: прямые операции сложение, умножение, возведение в натуральную степень не выводят за рамки натуральных чисел (множество натуральных чисел замкнуто относительно прямых операций). Прямые операции с делением дают множество дробных чисел (множество дробных чисел замкнуто относительно 4 операций). Прямые операции с вычитание дают множество целых чисел. Если рассматривать прямые операции и деление с вычитанием, то это приводит к рациональным числам. Если ещё рассматривать и извлечение корня из положительного рационального числа, нахождение логарифма, то появляется раздел вещественных чисел. Извлечение корня или логарифма из отрицательного числа приводит к множеству комплексных чисел.

С точки зрения теории, материал делится на разделы, в которых операции определяют природу раздела. Но в разделе можно рассматривать все семь операций. Так вычитание изучают и в 1 классе, а целые числа, порождаемые вычитанием, только в 6 классе. Деление изучают уже во 2 классе, а дробные числа порождаемые делением, только в 5 классе. В [10, 19] для начального знакомства с корнем и логарифмом используют множество натуральных чисел.

В 5-6 классах учебников серии "МГУ-школе" числовые системы изучаются последовательно, они вложены друг в друга. В курсе алгебры (7-9 классы) аналогично устроены изучаемые алгебраические системы. При этом в учебниках реализовано единство изучения теории и практики решения задач для каждого из разделов.

Принцип 3. Учебник должен сочетать в себе научность, экономность и логичность изложения материала с доступностью для учащихся его учебных текстов.

Требования научности и логичности с одной стороны (но не принцип ВТУ), простоты и наглядности, с другой, при изложении учебного материала, взаимно противоречивы. В учебниках достигнута некоторая гармония этих требований. Правильное соотношение между научностью точностью и доступностью есть один из самых важных критериев любого учебника математики. Тезис о простоте означает, прежде всего, простоту построения курса в целом (см. ниже), при этом основное внимание уделяется главным принципиальным идеям, уделяется много внимания разъяснению основных понятий, навыкам действий, осмысленному решению задач, а дополнительный учебный материал (исторические сведения, олимпиадные задачи, занимательные задачи, задачи на смекалку [11]) играет подчинённую роль и выделен в дополнительные параграфы.

Учебник предполагает, в частности, недопустимость непосильных абстракций в обучении и несоответствующих детскому опыту языка преподавания. Язык объяснений и задач приспособлен к психологии учащихся. Изложение учебного материала находится в соответствии с уровнем их знаний, развитием и возрастными особенностями. Это качество учебников, не в последнюю очередь, обеспечивается постоянной работой по ним с 1987 года одного из авторов учебников — Заслуженного учителя РФ А. В. Шевкина.

Принцип 4. Учебник не должен ограничиваться интересами «среднего» ученика, он должен удовлетворять интересам всех учащихся — от «слабых» до «сильных», должен обеспечивать любой желаемый уровень глубины изучения материала.

Это достигается сочетанием линейного и концентричного построения всего курса. Содержание теоретического материала развивается внутри раздела линейно, уровень трудности в рамках любой темы нарастает линейно. Например, присутствуют простые задачи на освоение теории, задачи на новый изученный метод, потом на комбинирование нескольких методов. Дополнительные задачи повышенного уровня включены практически во все разделы учебника, решение уравнений, неравенств и систем в старших классах дополняется задачами с модулем, с параметром. Имеется система упражнений для повторения изученного (в теории и практике), что привносит элементы концентризма в изучение математики.

Концентризм также проявляется и в том, что изучение каждого следующего раздела повторяет темы предыдущего раздела, но на новом уровне. Этот концентризм в обучении часто называют “восхождением по спирали”. Все это позволяет даже слабым ученикам достигать высокого уровня усвоения учебного материала.

Сочетание линейности и концентричности в обучении позволяет обеспечить систематичность обучения. При изучении нового раздела имеется информация для повторения и закрепления ранее изученного. Новое не будет усваиваться, если предыдущий материал недостаточно освоен. Решая задачи, ученик не только осваивает новый материал, но и повторяет ранее пройдённый. Прочность знаний обеспечивается постоянным повторением пройдённого материала. Повторение материала приводит к углублению, систематизации и обобщению знаний.

Надо отметить, что разложение целой части в отдельные разделы и каждого раздела на темы осуществляется анализом (дедукция), а объединение в целое с помощью синтеза (индукция). Поэтому сам способ построения обсуждаемых учебников естественным образом представляет единый аналитико-синтетический подход к написанию учебной книги с позиций объективного строения математического знания, что само по себе является глубинным положительным движущим мотивом при обучении.

Принцип 5. Учебник и способ изложения материала в нём должны быть пригодны для организации дифференцированного обучения и достижения разных целей по разным программам.

При массовом применении метода неизбежно встаёт вопрос о дифференциации обучения и задания в задачнике должны быть сгруппированы в последовательные группы. В первой содержатся стандартные обязательные задачи для всех учащихся и вторая, следующая за ней группа, содержит задачи, предназначенные для тех учащихся, которые проявляют интерес к изучению математики, хорошо мотивированы на её изучение. К этим двум обязательным уровням добавляются ещё 3-4 уровня, повышающейся сложности. Решая задачи, учащиеся неоднократно возвращаются к исходному, основополагающему теоретическому материалу, поднимаясь медленно к новым уровням.

В общеобразовательных школах, не ориентированных на повышенную математическую подготовку, дополнительный материал можно не рассматривать без потери в формировании правильной картины изучаемого. В школах и классах с углублённым изучением математики изучаются дополнительные теоретические вопросы, решатся дополнительные задачи, специально выделенные в учебниках. Применение одного учебника и для общеобразовательных школ и для школ с повышенной подготовкой по математике даёт много преимуществ. Например, переход на более высокий уровень обучения не будет вызывать трудностей ни у учителей, ни у учащихся, так как на каждом из этих уровней изложение материала в учебниках строится по одной и той же схеме. Это позволяет учащимся повышать свой уровень математической подготовки самостоятельно, что способствует мотивации обучения и т.д. Учебник учит, как можно учиться самостоятельно, как самостоятельно добывать знания и их осмысливать. Это требование непосредственно связано с предыдущим четвертым принципом.

У учащихся 5-6 классов ещё недостаточно развито абстрактное мышление, поэтому при введении новых понятий, идей в учебниках авторы идут от частного к общему, от известного в предыдущем разделе к новому в следующем разделе. Прежде чем сделать общий теоретический вывод, демонстрируется ряд примеров с конкретными условиями. Сложным задачам предшествует ряд более простых, комбинацией которой является эта сложная задача.

Принцип 6. В учебниках серии “МГУ-школе” уделяется много внимания вопросу «почему?», имеющему большой развивающий потенциал, который увязан с вопросом “как?”

Учебники позволяют интенсифицировать процесс обучения. Они полностью обеспечивают обучение тех школьников, которые хотят и могут обучаться основам наук, так как нацелены на формирование понятийного мышления. В учебниках имеются определения понятий, доказательства их свойств, причём в младших классах доказательства проводятся на конкретных числах, но так, чтобы при замене чисел буквами получилось общее доказательство; с 7 класса формулируются и доказываются теоремы. Всё это говорит о заботе авторов о развитии теоретического мышления, необходимого для сознательного усвоения школьных курсов математики и смежных дисциплин

Эта сторона отличается продуманностью и взвешенностью, учитываются психолого-физиологические возможности учеников. Учебники действительно эффективные, потому что используют подходы, нацеленные на развитие логического, абстрактного мышления. Таким образом, они способствуют развитию личности учащегося совместно с другими науками, особенно с физикой, химией.

Учебники серии «МГУ – школе» имеют высокий научный и методический потенциал. Они отличаются расположением учебного материала в естественной последовательности, как устроена сама математика, как происходил исторически процесс познания математических истин. Эта естественная последовательность позволяет излагать материал глубоко, экономно, сжато и строго. Последовательность разделов нацелена на получение фундаментальных знаний, на формирование твёрдых навыков, на обучение действовать осознанно.

Усвоение будет осознанным, если новые понятия будут появляться как развитие ранее изученных. Недопустимо формальное, механическое усвоение непонятых учеником знаний. Способствует осознанному усвоению то, что в учебниках, как уже было отмечено выше, имеются следующие друг за другом разделы: натуральные числа, обыкновенные дроби, десятичные дроби, рациональные, комплексные. Темы, изученные в предыдущем разделе, появляются в следующем разделе на новом уровне. Идея появления нового раздела связана с расширением множества чисел, для того, чтобы новое множество стало замкнутым относительно новой обратной операции. Таким образом, знания и навыки сообщаемые ученикам учеников будут появляться в определённой системе и строгой последовательности, что в [3] названо “принципом системности”.

Принцип 7. Арифметика — фундамент всей школьной математики и смежных естественно-научных дисциплин.

Это основная, методически очень продуктивная, простая и ясная мысль, которая граничит с банальной истиной, но тем не менее про неё сейчас основательно забыли. Арифметика является первым примером построения теории. В ней есть определения, доказываются теоремы, другое дело, что в соответствии с опытом младших школьников и возможностями восприятия слова "определение", “теорема" не используются. Например, признаки делимости чисел в пятых классах доказываются на конкретных числах, а в старших классах доказываются как теоремы.

Следует отметить, что обучение школьников в рамках научно-обоснованной схемы изучения числовых систем готовит их к изучению алгебраических систем, закладывает базовые знания, умения и навыки для всего последующего изучения математики и смежных дисциплин.

Существенным содержанием курса математики в 5-6 классах и способом развития мышления и речи учащихся является работа с текстовыми задачами. Процитируем: “Пока мы будем учить детей на русском языке – не только великом и могучем, но и достаточно трудном, пока мы хотим учить их сравнивать, выбирать наиболее простой путь достижения поставленной цели, пока мы не отказались от воспитания гибкости и критичности мышления, пока мы стараемся увязывать обучение математики с жизнью, нам будет трудно обойтись без текстовых задач – традиционного для отечественной методики средства обучения математике. В конце 60-х годов XX в. арифметические способы решения задач посчитали анахронизмом и перешли к раннему использованию уравнений. Качество школьного образования (не только математического) от этого только ухудшилось. Теперь уже многие учителя сами плохо представляют, что такое арифметические способы решения текстовых задач, какие возможности для развития языка и мышления школьников они не используют в своей работе” [12].

В 5 классе учебников серии "МГУ–школе" в даются основные сведения о нуле и натуральных числах, присутствует множество текстовых задач. Повторяются и систематизируются сведения о натуральных числах, изучается «Делимость натуральных чисел». С самых первых уроков большое внимание уделяется обучению школьников решению текстовых задач арифметическими способами. В частности, рассматриваются задачи «на части», «на совместную работу» и т.п. В полном объёме изучаются обыкновенные дроби, большое внимание уделено законам арифметических действий и их применению для упрощения вычислений. После каждой из четырёх глав имеются Дополнения, содержащие исторические сведения и занимательные задачи. Например, вычисления с помощью калькулятора, многоугольники, использование чётности при решении задач, сложные задачи на движение по реке.

В 5 классе нет десятичных дробей, которые важны для практической жизни. Дело в том, что в учебник заложено требование формирования у учащихся достаточно полных умений, относящегося к каждому из разделов. В пятом классе изучаются натуральные числа и обыкновенные дроби, составляющие основу всей математики. Их надо изучить основательно, чтобы в 6 классе не прибегать к изнурительному повторению плохо осмысленных учащимися неполных умений и навыков. Изучение разделов в достаточно полном объёме и достаточно глубоко – это очень важный принцип, имеющий оправдание и с философской точки зрения, теории познания.

6 класс. Для повторения натуральных чисел и дробей сначала изучаются отношения, пропорции, проценты, масштаб. Затем изучаются целые числа, на которых проще освоить идею знака числа, определять знак результата действия над числами. Лишь после этого вводятся дроби произвольного знака, раздел “Рациональные числа”, при изучении которых существенно используются знания по темам "Обыкновенные дроби" и "Целые числа". Если предыдущие разделы освоены хорошо, то проблема сводиться к освоению особенностей использования знаков в действиях с дробями.

Таким образом оказывается изученным множество всех рациональных чисел. Осталось изучить только действия с некоторыми из них, записанными в виде десятичных дробей. Сначала изучаются положительные десятичные дроби, потом десятичные дроби произвольного знака и встаёт естественный вопрос о переходе от одного способа записи рационального числа к другому – от десятичной дроби к обыкновенной и обратно. Что приводит к понятию бесконечной десятичной периодической дроби, обучению перехода от бесконечной периодической дроби к обыкновенной в простых случаях.

У учащихся естественно возникает вопрос о существовании непериодических дробей, они оказываются хорошо подготовленными к тому, что такие дроби существуют, что действия с ними выполняют приближённо. Так появляются иррациональные числа, дополняющие множество всех рациональных чисел до множества всех действительных чисел. Числовая система, необходимая для обучения в основной школе оказывается изученной к концу 6 класса.

Итак имеются разделы

натуральных чисел – **N**;

дробных чисел – **D**;

дробных десятичных чисел **–** $\mathbf{D_{10}}$;

целых чисел – **Z**;

рациональных чисел – **Q**;

действительных чисел –**R**.

Изучение системы комплексных чисел **C** отодвинуто на 8 – 11 классы.

Принцип 8. Текстовые задачи это ядро математического образования. Для глубокого понимания математики текстовые задачи необходимо решать постоянно в течении всего срока обучения с 1 по 11 класс.

Систематическое решение текстовых задач служит развитию логического, абстрактного мышления. Тем не менее, именно этого не хватает мировой педагогике. Решение текстовых задач может быть поставлено в качестве первого и самого верного способа развивать мышление и речь учащихся, это важнейший инструмент обучения, чтобы воспитывать склонность к естественно-научным дисциплинам, в которых вообще нельзя себе представить обучения иначе как на текстовых задачах (физика, химия). Почему физики, химики ничего не выдумывают и учат с помощью текстовых задач? Почему только математики позволяют себе нелепую деятельность, изобретая всякие нежизнеспособные, малопродуманные, не проверенные практикой, отвергнутые историей методики обучения?

Имеются два пособия для 5-6 классов [13] и 7-11 классов [14], содержащих текстовые задачи, подготовленные одним из авторов учебников. Точно также как по физике сборники задач содержат только тестовые задачи. У физиков наблюдается правильная постановка дела. Учебники физики и задачники это разные книги, в одной книге эти две стороны не смешиваются.

Текстовые задачи в учебниках серии "МГУ-школе" занимают центральное место. Именно решение текстовых задач вызывают интерес и положительные эмоции в наибольшей степени, чем любая другая деятельность, это установлено в течении многих столетий. Это объясняется тем, что для решения текстовых задач, необходимо задействовать мышление: понять постановку задачи, найти путь от неизвестных данных, к конечному ответу (если надо, то рассматривая промежуточные задачи (это анализ), затем реализовать найденную идею решения (синтез), затем решение проверить и оценить критически. Требуется оценить, нет ли более экономного или красивого решения? Мышление используется в полной мере, развивается речь и логика. В процессе решения текстовой задачи приходится вспомнить аналогичные задачи и методы, высказать предположения, правдоподобные суждения. Попутно оценивается правдоподобность результата, размерности величин. Каждая текстовая задача может быть развита в разных направлениях: изменить данные, комбинировать условия, самостоятельно составить задачу, все эти стороны развивают мышление.

Особенный интерес, даже слабые ученики, проявляют к оригинальным, занимательным задачам, задачам на смекалку [11]

На ранней стадии обучения сначала используются арифметические способы решения. Если задачи подобраны соответственно возрастным возможностям учащихся, то работа с ними способствует развитию их мышления и речи. Учащиеся это чувствуют, начинают осознавать, и в конечном счёте, все это значительно повышает эффективность обучения и вызывает интерес к процессу обучения, вызывает положительные эмоции при успешном преодолении трудностей.

Простые традиционные текстовые задачи необходимы для массового математического образования. Их главная функция — служить начальному развитию логического, абстрактного мышления, а не прилагаться к практике в буквальном смысле. Хотя и практическая сторона в текстовых задачах проявляется наиболее выпукло.

Часто мы слышим, в Европе или в Америке, что надо решать практические задачи из жизненной практики, которые буквально применимы к жизненным ситуациям. Но в русской школе, в российском образовании всегда стремились дать фундаментальные знания, а не знания потребителя для практического утилитарного использования. Авторы учебников серии “МГУ-школе” не следуют в русле этих западных, прагматических, но неприемлемых для фундаментального образования, воззрений. Текстовые задачи и методы их решения это то главное, центральное звено, ухватившись за которое можно вытащить **всю цепь**.

Принцип 9. Решение текстовых задач должно быть тесно увязано с изучением теории изучением текстовых учебных материалов, изучением методик решения задач.

Второе по важности звено это теория разделов: определения, правила, законы, алгоритмы, теоремы, способы, методы, подходы. Что такое **понимание** предмета (математики, геометрии, физики, химии)? В первую очередь это **умение** применить теорию к практическим текстовым задачам, что в геометрии, физике и химии совершенно очевидно. Умение правильно и уверенно применить общие теоретические знания к конкретной проблемной, отражённым в текстовой задаче, есть самое первое условие осмысленного понимания и осознания глубинной сути предмета.

Чтобы решить задачу, нужно осознать условие задачи, затем понять, из какой темы задача, какие теоретические сведения необходимы, вспомнить или найти нужные методы и формы приложения теории к данной задаче. Найти самый эффективный способ, приводящий к цели [15]. То есть по выражению знаменитого педагога Д. Пойя “совершить некоторое математическое открытие” [16].

Таким образом, мы видим, что в решении текстовой задачи, как в капле отражается радуга переплетения теории и методической практики, чего не наблюдается при решении вычислительных задач, которыми заполнены без всякой меры, страницы современных учебников математики. Хотя и понятна важность решения вычислительных примеров, можно сказать, что они по значимости занимают третьестепенное место, после теории, после практики решения проблемных задач**.** Текстовые задачи пронизывают все разделы и в особенности натуральные числа, дробные числа, десятичные дроби и, как уже отмечено, их следует решать постоянно.

Научные принципы

В курсе школьной математики находят отражение основные идеи современной математики, хотя школьный курс никак не отождествляется с научным кусом математики. Определения, понятия, правила, теоремы формулируются доступно для сознания учащегося, но в то же время они не противоречат научной точки зрения.

Принцип 10. В учебниках выбрана схема изложения материала, отвечающая научным представлениям о расширении понятия числа.

Числовые системы изучаются в основном с 1-7 класс. Натуральные числа являются фундаментом всего математического образования и изучение этого раздела растягивается и на старшие классы, изучается этот раздел и в университетах. Значимость этого раздела не ограничивается только арифметикой. На множестве натуральных чисел можно изучать не только сложение, умножение, возведение в натуральную степень, но и вычитание, деление. В принципе, можно даже познакомиться с извлечением корня, логарифмированием, не прибегая к другим множествам чисел [10, 19].

В учебнике авторы придерживаются традиционного для российской школы от Л.Ф. Магницкого до А.П. Киселева и И.Г. Шевченко последовательности изучения числовых систем. В учебниках подспудно проводится чёткая мысль, о том, что каждое последующее множество целиком включает в себя предыдущее множество, последующее множество чисел является расширением предыдущего. Расширенное множество замкнуто относительно новой операции её породившей.

Хорошо известна цепочка вложенных множеств

$$\begin{array}{l} D \\ \cup \\ N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \end{array}$$

Рис.1. Изображение вложения числовых множеств, с помощью знака вложения.

Большим преимуществом подхода принятого в учебниках, кроме формирования полных умений и навыков выполняемых действий на все более высоком уровне (в новом разделе), является также подготовка числовой базы для обучения в 7 классе по курсам алгебры и геометрии, где, ещё не имея всех действительных чисел, принято рисовать непрерывные графики, доказывать тождества сокращённого умножения, а потом без всяких оговорок применять их в случаях $(3 + \sqrt{2})^2$ и даже $(\bar{a}+\bar{b})^2$, говорить об измерении длин отрезков, обходя проблему их несоизмеримости.

Для более эффективного обучения в 7-9 классов считается необходимым не чередовать изучаемые разделы , а изучать материал крупными блоками, (разделами, в которых появляется новая операция, более полно и осмысленно. Это относиться и к более старшим классам (см. заключение)

В 7 классе кратко повторяется изученное в 5-6 классах, учитывая, что учащиеся могли ранее обучаться по другим учебникам. Ещё раз проходится материал до понятия действительного числа и правил приближенных вычислений (определение верных цифр результата очень важно для изучения физики и приближенных вычислений в математике). Далее изучаются одночлены, которые включают в себя уже изученные числа, потом — многочлены, включающие в себя одночлены, затем – алгебраические дроби, рациональные выражения, включающие в себя многочлены. Изучение алгебраических систем напоминает изучение числовых систем. Изучаемые множества вкладываются друг в друга как матрёшки. Дробные выражение со знаменателем 1 эквивалентно целому выражению. По всему курсу учитель может вести повторение и систематизацию арифметических способов решения текстовых задач, затем изучаются уравнения, системы уравнений, их применение к решению задач.

Практика показывает, что обучение математике "крупными блоками" (разделом), когда ученик надолго погружается в работу однотипными объектами, позволяет заложить более прочные и осознанные знания, сформировать более полные и устойчивые умения и навыки, которые также не требуют большого учебного времени для их поддержания. Что же касается интересности предмета, то это никак не связано с частотой переключения с одного типа объекта на другой тип, с одного раздела на другой, когда внимание рассеивается. Интересность для учащихся в другом – в более полном овладении изучаемыми объектами одного раздела, а переключения находятся в решении текстовых задач, задач олимпиадного уровня, задач из ОГЭ и ЕГЭ. Это относится и к более старшим классам.

Фундаментальность и предметность обучения, которая так традиционно присуща Российской педагогике наилучшим образом сочетается с подачей материала крупными блоками (разделами), когда имеется тесная связь-включение между крупными блоками. Это основа для получения хороших результатов обучения в настоящее время максимально подорвана. Сначала уменьшилось учебное время на изучение математики, потом появилась система ложных ориентиров – стали приуменьшать значение знаний, умений и навыков, развития памяти, стали говорить о необходимости формирования компетентностей, про которые все равно приходится говорить в терминах "знания", "умения", “навыки”. Введена система итоговых испытаний, отвлекающая учителя и учащихся от основательного фундаментального изучения предмета, подменяющая её более простой целью – научиться решать небольшой набор типовых задач. Однако большие затраты времени на подготовку к этим испытаниям всё равно дают разгромные результаты – именно потому, что надежда добиться приличных результатов обучения без опоры на фундаментальность обучения является не более чем иллюзией.

Без правильного представления об устройстве математических объектов, входящих в разделы, знаний об их свойствах, способах их преобразования, правильного использования, процесс обучения математике в основной школе стал менее эффективным. Надо ли говорить, что выпускники основной школы стали получать более слабую подготовку и оказываются неподготовленными к основательному изучению курсов математики в старшей школе и, как следствие, не готовыми к обучению в вузе.

В учебнике представлен материал в некотором избытке, для того чтобы каждый раздел мог быть усвоен до вполне достаточной разумной глубины. Совсем не обязательно каждый раздел изучать во всем объёме, на это просто нет времени. Но стремиться к этому надо. Чем полнее изучен предыдущий раздел, тем быстрее возрастает инерция движения, набирает скорость усвоения последующего материала, тем лучше обнаруживается, пусть даже бессознательно, действительная самодвижущая причина разворачивания разделов в курс школьной математики.

Обеспечить прочные знания по предмету (по математике, геометрии, физике, истории и др.) можно только при условии разумно организованного систематического повторения теоретического учебного материала и практического решения задач. Повторение должно быть организованоциклично. Должно присутствовать простое повторение, как повторное решение тех же самых задач из предыдущих разделов (линейное обратное повторение). Однако, способ изучения материала раздел за разделом автоматически предписывает повторение по нарастающей сложности решения задач, в процессе которого учащиеся будут постоянно возвращаться к ранее изученным темам, но на новых уровнях сложности (“повторение по спирали”, “восхождение по спирали”). Предусмотрено нарастание сложности задачного материала, с учётом законов развития мышления детей и их психологического состояния на протяжении всего учебного года, на протяжении всех лет обучения. Сокращается время на усвоение одного раздела, потому что получается систематическое повторение предыдущего материала, который целиком входит в каждый новый раздел.

Такая последовательность изложения не противоречит, и даже можно сказать, как нельзя лучше подходит для сочетания с другими типами изложения: индуктивный, генетический, дедуктивный, но мы здесь не будем подробно останавливаться на этой, прямо не относящейся к учебникам МГУ-школе, стороне, хотя она очень важна. Отметим только, что фактически последовательность разделов предопределяет не только индуктивный, но и генетическое изложение, потому что оно показывает понятие в развитии, учащийся видит как, начиная с понятия натурального числа, оно, по мере перехода к другим разделам, видоизменяется, знания пополняются другими понятиями числа: дробного, целого, рационального, действительного (иррационального), комплексного. Учащийся будет понимать, почему это происходит и наблюдать понятие в развитии и, пусть неосознанно, воспринимается диалектичность математики и связанная с ней диалектичность методики изложения.

В словах В. Садовничий предваряющих каждый учебник серии "МГУ-школе" отражено, что освоение знаний Науки подобно возведению здания так, что невозможно построить следующий этаж не построив предыдущего. Это в высшей степени относится к математике, которая как никакая другая наука похожа на здание и имеет трёхмерное строение. Объективно математика состоит из разделов. Разделы в свою очередь состоят из тем. Задачи, примеры в какой-то теме каждого раздела могут варьироваться по трудности. Поэтому имеется как бы три координаты, и мы имеем, образно говоря, параллелепипед (здание) математики. Однако важно то, что высота каждого прямоугольника разный и поэтому следующий образ дополняет предыдущий. Математика это лестница, и каждая ступень есть некоторый раздел математики. Перепрыгнуть через одну ступень лестницы, не освоив её на достаточном уровне и перейти к более высоким ступеням, не удаётся.

Однако принцип нельзя понимать буквально. Современного научного понимания теории числа в школе нельзя, невозможно добиться и авторы учебников не стремятся к этому. По мере обучения в школе, вузе нередко придётся переосознать и переосмыслить заново уже пройдённые разделы, даже перевыучить с позиций новых отрывшихся горизонтов. Это закономерно и это неизбежно. Добиваться изначально исчерпывающего научного понимания у школьников природы числовых систем было бы абсурдным пожеланием. В учебниках методично, с учётом возрастных особенностей, решается проблема научности, методической основательности и психологической оправданности, применяемых взаимно противоречивых 10 принципов, стремясь к выполнению главных принципов понятности, убедительности для ученика.

Заключение

Человечество вступило в третье тысячелетие, в век информации, в условиях катастрофического падения общего образования и особенно математического. Одной из проблем является проблема создания эффективного учебника математики. Известный, методически безупречный учебник А.П. Киселёва, действовавший с начала и до конца 60 годов прошлого века (свою методическую ценность он сохраняет и по сей день), не может быть использован, хотя бы по причине того, что не отражает нового расширившегося содержания учебного материала, появившегося за последние 50-60 лет. Сегодняшняя проблема создания эффективного учебника и способа обучения, в свете высказанных в статье положений, состоит в приведении формы изложения учебного материала (по типу Киселёвского) в соответствие с расширившимся содержанием. По мнению автора статьи, ближе всего к решению этой проблемы приблизились авторы учебников МГУ-школе.

В статье показано, что в основе создания учебника лежат 10 принципов. Наиболее важными принципами создания эффективного учебника являются: 1) деление учебного материала на разделы (большие блоки с однотипными объектами) 2) преимущественное линейное освоение разделов 3) в процессе обучения акцент делается на текстовые задачи (а в "Алгебраических системах" ещё и на функциональную линию) 4) используется наработанная база данных за 50 лет.

Это и есть необходимые предпосылки создания эффективного учебника. Безусловно также, что информационные технологии позволяют решить проблему электронного учебника опираясь именно на эти принципы, что в бумажном варианте учебника, ориентированного только на поурочно-классное ведение занятий, сделать затруднительно, если и вовсе невозможно.

В планируемой следующей работе предполагается обсудить применение этих принципов к "Алгебраическим системам", которые также состоят из разделов: одночлены, многочлены (1, 2 степени, и более высоких степеней), разделы дробно-рациональных выражений, алгебраических, показательных, логарифмических, тригонометрических. Центральными темами являются темы: тождества, функции, уравнения, неравенства, возможно осложнённых модулем и параметром. В разделах может рассматриваться, а также операции взятия предела, дифференцирования и интегрирования. Будет рассмотрена реализация принципов в бумажных учебниках МГУ-школе [9, 10], а также те возможности, которые предоставляют информационные технологии, для безусловного, последовательно-исчерпывающего применения принципов в электронном учебнике. В настоящее время имеются тенденции, стремления к такому решению проблемы. В работе [18] чётко проводиться деление на разделы, в [19] это стремление тоже просматривается, но осуществляется не до конца последовательно.

Автор статьи благодарит авторов учебников МГУ - школе М.К. Потапова и А.В. Шевкина за предоставленный материал, прочтение рукописи и сделанные замечания и суждения. Автор также выражает признательность И.П. Костенко за ряд ценных критических замечаний, послуживших улучшению статьи. Тем не менее, ответственность за все возможные допущенные фактические неточности, целиком лежат на авторе статьи.

Список литературы

1. http://www.rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html
2. http://www.ug.ru/download/2008/glenn.pdf
3. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. Москва, РГУПС. 2013.
4. Math for America http://www.mathforamerica.org/our-model
5. http://mathcircle.berkeley.edu/index.php?options=bmc|bmcarchives|Circle Archives
6. http://www.boeing.ru/Boeing
7. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. М.: Просвещение, 2012.
8. Математика. 5 (6) класс : учеб. для общеобразоват. организаций с приложением на электронном носителе / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2016. – (МГУ–школе).
9. Алгебра. 7 (8, 9) класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – (МГУ–школе).
10. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 (11) класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К.

Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – (МГУ–школе).

11. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку: 5-6 классы. М.: Просвещение, 2015

12. http://edu.1september.ru/courses/11/2

13. Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике: 5-6 классы М.: Илекса, 2011

14. Шевкин А.В. Текстовые задачи: 7–11 классы: М.: Илекса, 2015.

15. Пойя Д. Как решить задачу М.:Наука, 1959.

16. Пойя Д. Математическое открытие М.:Наука, 1970.

17. Киселёв А.П. Геометрия.Стереометрия. 10-11 классы. М.:Дрофа, 1995.

18. Моденов В.П. Математка для школьников и абитуриентов М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

19. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала анализа. М. : Просвещение, 2016.