Министерство образования и науки Российской Федерации
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.А. ЛЕБЕДЕВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Часть 1

Допущено отделением Научно-методического совета
по математике Министерства образования и науки РФ
и ЮФО в качестве учебного пособия для студентов
и школьников

Краснодар
2012

УДК 519.2(075.3)
ББК 22.17я7
Л 79

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
Р.З. Камалян
Доктор физико-математических наук, профессор
Е.А. Семенчин

Лебедев, К.А.
Л 79 Теория вероятностей и математическая статистика (элементарное введение): учеб. пособие /К.А.Лебедев. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2012. 105 с.: ил. 500 экз.
ISBN 978-5-8209-0805-7

Излагаются начальные понятия, идеи и методы теории вероятностей, комбинаторики и статистики, содержатся простые иллюстративные примеры, поясняющие основные понятия этих дисциплин. Пособие может быть использовано как дополнение к любому действующему учебнику математики.

Адресуется студентам вузов и школьникам.

УДК 519.2(075.3)
ББК 22.17я7

ISBN 978-5-358-04884-3

ВВЕДЕНИЕ

По теории вероятностей и математической статистике имеется множество книг, пособий. Например, для школ изданы пособия Е.А.Буниковича, В.А. Булычева [1], Я.С. Бродского [2], А.Г. Мордковича [5], для вузов имеется многократно изданные и превосходные в методическом отношении издания В.М. Гмурмана [3, 4], краткое доброкачественное издание Д. Писменного [6]. Однако во всех этих изданиях совершенно недостаточно разъясняется **понятийный аппарат** указанных дисциплин, недостаточно демонстрируются методы применения понятийного аппарата при решении задач. Понятийный аппарат теории вероятностей и математической статистики является довольно трудным, далеко непросто воспринимаемым материалом. Многие школьники, студенты и учителя школ нуждаются в пособии, в котором на простых примерах и достаточно подробно излагались бы понятия этих дисциплин и демонстрировалось бы применение этих понятий при решении задач.

Пособие состоит из 3 частей:

Часть 1. Теория вероятностей и комбинаторика.

Часть 2. Теоремы теории вероятностей и случайные величины.

Часть 3. Элементы математической статистики.

Уже во введении рассмотрим основные, самые общие понятия, используемые в теории вероятностей.

Пусть проводится **эксперимент**. По окончании проведения эксперимента наблюдаются **результаты эксперимента**. В теории вероятностей результаты эксперимента называют **исходами, или событиями**. Если в результате эксперимента событие может произойти или не произойти, то событие является **случайным** (**возможным**). Если говорят о случайном событии, то всегда подразумевается некоторый эксперимент, в результате которого это событие появилось. Важно уметь измерять **вероятность** появления случайного события в эксперименте.

Пример 1. Пусть проводится эксперимент: подбрасывается монета. Подброшенная монета может упасть «орлом» вверх, а может не «орлом» вверх. Поэтому событие {*выпадет «орёл»*} есть **случайное событие** в эксперименте по подбрасыванию монеты. Если проводить эксперимент много раз, то можно заметить, что орёл и решка появляются приблизительно одинаково часто. Эти события имеют равную вероятность.

Пример 2. Пусть в урне находятся 3 красных и 2 черных шара. Проводится эксперимент: вынимают, не глядя, один шар. В результате эксперимента появится либо черный, либо красный шар. Событие {*появился черный шар*} есть случайное событие. Случайным событием будет и событие {*появился красный шар*}. Однако если проводить эксперимент много раз, всякий раз возвращая шар в урну и тщательно её встряхивая, то можно заметить, что в результате опыта красный шар появляется чаще, чем черный, причём в строго определённой пропорции.

Пример 3. Пусть проводится эксперимент: производится стрельба из спортивной винтовки. Стрелок может попасть в цель, может не попасть. Поэтому событие {*попадание*} в эксперименте есть **случайное событие.** Интуитивно ясно, что новичок вероятнее промахнётся, а спортсмен-разрядник скорее поразит мишень. Если проводить эксперимент с новичком, то он большей частью не будет попадать в мишень. Если проводить многократно эксперимент со спортсменом-разрядником, то он чаще будет попадать в мишень.

ЭКСПЕРИМЕНТ

В науке ставят эксперименты для изучения явлений, событий. **Явления или события** происходят при создании некоторых **условий,** всю совокупность которых обозначим буквой $\boldsymbol{S}$. Если созданы **условия** $\boldsymbol{S}$ (природой, человеком), то говорят, что ставится **эксперимент.** Условия $\boldsymbol{S}$ проведения эксперимента особо оговариваются или подразумеваются. **Эксперимент** суть совокупность некоторых **условий**.

Понятия «эксперимент» и «совокупность условий $\boldsymbol{S}$» эквивалентны:

«эксперимент» $\Leftrightarrow$ «совокупность условий $\boldsymbol{S}$».

Наряду со словом эксперимент употребляются слова опыт, испытание, наблюдение.

Вместо того чтобы говорить «совокупность условий $\boldsymbol{S}$ осуществлена», говорят «проведено испытание», или «проведен эксперимент», или «проведен опыт». Можно говорить, что наблюдаемые явления происходят в результате эксперимента. Говорят даже, что природные явления происходят в результате эксперимента, проведённого природой, а мы наблюдаем его исходы. Вместо словосочетания «явление, наступающее в результате опыта», употребляется словосочетание: «**исходы эксперимента**», или «**элементарные события эксперимента**».

В примере 1 под условиями $\boldsymbol{S}$ предполагается выполнение следующих условий: монета однородна, имеет несмещённый центр тяжести (бутерброд имеет смещённый центр тяжести, поэтому чаще падает маслом вниз), имеет идеальную круглую форму, опыт производится в отсутствии помех, способ подкидывания приблизительно один и тот же и тому подобные условия. Однако в этих условиях есть неучтённые условия, которые и приводят к случайности. Например, сила, с которой монета подбрасывается пальцем руки, в каждом произведённом опыте, может быть разной, поэтому подбрасывание производится на разную высоту и количество вращений в воздухе будет произвольным.

В примере 2 под условиями $\boldsymbol{S}$ предполагается выполнение следующих условий: вынутый шар после каждого опыта возвращается в урну, урна при каждом опыте встряхивается, и **5** шаров распределяются случайным образом, экспериментатор не видит шары, все шары имеют идеальную одинаковую круглую форму и одинаковые размеры, шары неразличимы на ощупь. Однако в условия ***S*** не входят некоторые факторы, приводящие к случайности появления белого или красного шара. Например, при встряхивании все шары имеют случайные разные скорости по величине и направлениям, которые учесть невозможно.

В примере 3 под условиями ***S*** предполагается выполнение следующих условий: стрелок одинаково тщательно прицеливается, чрезмерно не утомляется, отсутствуют мешающие факторы и т.п. Однако в условия ***S*** не входят некоторые факторы, приводящие к случайности попадания или промаха: неточность прицеливания, некоторые колебания винтовки в руках и неправильный выбор момента выстрела, некоторые отличия в положении рук с винтовкой и т.п.

Во всех трёх примерах в эксперименте присутствуют условия ***S***, которые остаются **постоянными и неизменными** при многократном проведении эксперимента, и есть более тонкие условия, которые учесть невозможно, и они приводят к случайным **исходам** эксперимента.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА (СОБЫТИЯ)

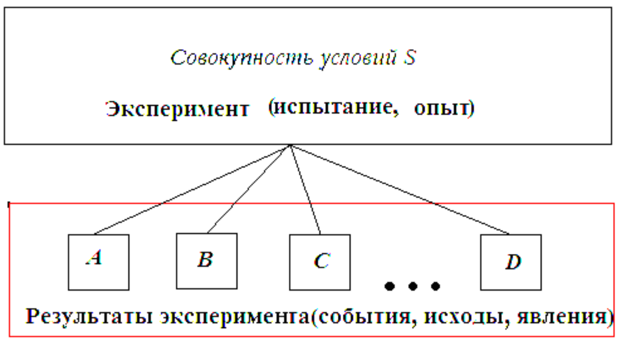
События эксперимента обозначаются заглавными латинскими буквами ***A, B, C, D, E, F, … .*** Результаты эксперимента (события, исходы, явления) подразделяются на три вида: ***достоверные, невозможные и случайные***. Достоверным событием называют событие, которое обязательно произойдёт при создании совокупности условий ***S***.

В науке и математике часто утверждаются истины: вода кипит при 100 градусах, свет распространяется по прямой, дважды два – четыре, сумма чётных чисел чётна, через две точки можно провести только одну прямую и т. п. Эти утверждения касаются достоверных явлений, фактов. Естественнонаучные дисциплины во многих случаях изучают достоверные явления и законы, которым они подчиняются.

Невозможным событием называется событие, которое заведомо не может произойти при создании совокупности условий S. Например, в примере 1 монета не может упасть на ребро, это событие считается невозможным, в примере 2 не может появиться шар черного цвета, в примере 3 после выстрела пуля не может остаться в дуле винтовки.

Реальная жизнь и практика не так просты и однозначны. Они не исчерпываются ***достоверными*** и ***невозможными*** явлениями. Исходы многих экспериментов заранее непредсказуемы. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадёт подброшенная вверх монета, попадёт стрелок в цель или нет, какого цвета будет вынут шар из урны, какая масть будет вытянута из колоды и т.д. Это вероятностные задачи, в них условия проведения эксперимента S строго определены. Такие задачи решает теория вероятностей. Теория вероятностей изучает главным образом те явления, которые могут произойти или могут не произойти в экспериментах.

Схема для иллюстрации взаимосвязи понятий: совокупность условий S (эксперимент) и результаты эксперимента. Из рисунка видно, что результатами эксперимента являются разные события ***A, B, C, …, D.***



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Однако случайные явления тоже имеют свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении одного и того же эксперимента. Если провести эксперимент: подбросить например монету 1000 раз, то «орёл» выпадет приблизительно в половине случаев. Закон не утверждает, что число «орлов» будет в точности 500 или окажется в промежутке от 490 до 510. Он не предсказывает абсолютно точно количество исходов, но даёт определённую степень уверенности в том, что некоторое случайное событие происходит с определённой ***частотой*** при многократном повторении опыта (создании условий ***S***), т.е. указывает на некоторую закономерность.

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает закономерности случайных событий, возникающих в многократно проводимых экспериментах.

Теория вероятностей неразрывно связана с нашей повседневной жизнью. Это дает возможность установить многие законы случайных **явлений** опытным путем, многократно повторяя эксперименты при одних и тех же условиях ***S***. Материалами для этих экспериментов чаще всего бывают обыкновенная монета, игральный кубик, шары, домино, рулетка, колода карт и др. Каждый из этих предметов так или иначе связан с играми. Дело в том, что случайное ***явление*** здесь предстаёт в наиболее чистом виде, и первые вероятностные задачи были связаны с оценкой ***шансов*** игроков на возможность выигрыша. ***Шансы – случаи, в которых наступает выигрыш.***

ВЕРОЯТНОСТЬ

Наиболее важное понятие теории вероятностей есть понятие вероятности события. Оценивая возможность наступления какого-либо события в эксперименте, мы хотели бы количественно, с помощью числа выразить степень возможности наступления события. Важно уметь давать количественные характеристики вероятности наступления событий. Нужно научиться **измерять** вероятность будущих событий, с какой частотой они будут появляться в эксперименте, проводимом много раз.

Мы знаем, как измеряются длины, площади, объёмы, время, масса, углы, работа, температура, информация и др. Для измерения какой-либо величины выбирается единица измерения: для длины – метр, для площади – квадратный метр, для объема – кубический метр, для времени – год, для веса – килограмм, для углов – полный угол, для работы – джоуль, для температуры – градус, для информации – бит и т. д.

Для измерения большей или меньшей возможности наступления события в эксперименте в качестве единицы измерения берётся число **1**, которая характеризует **достоверное** событие. Говорят, что достоверное событие появится со 100% вероятностью и вероятность равна **1**. Невозможное событие оценивается числом **0**. Говорят, что невозможное событие произойдёт с вероятностью **0** (т. е. оно не произойдёт).

Вероятность случайного события ***A*** – это есть действительное число, заключённое между **0** и **1** и обозначаемое обычно буквой ***P (probability – возможность)***. Чем больше число ***P*** ближе к **1**, тем вероятнее произойдёт событие в эксперименте.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Есть вопросы прогнозирования, например: каковы прогнозы на урожай в данном году, когда в следующем году выпадет первый снег или сколько человек в городе захотят в течение ближайшего часа позвонить по телефону, выиграет ли футбольная команда матч и т.д. Задачи прогнозирования более сложные, чем вероятностные задачи, так как условия ***S*** в них много больше, чем в вероятностных задачах. Специфические ответы на поставленные вопросы даёт **математическая статистика**. С помощью теории вероятностей и математической статистики можно предсказывать с большой степенью уверенности появление многих случайных событий и явлений.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Возникают и другие вопросы **прогнозирования**: каковы последствия экологического кризиса, будет ли изобретено средство против рака в новом столетии, состоится ли полёт человека на планету Марс в ближайшие 50 лет, будет ли применено ядерное оружие и каковы последствия его применения и т.д. Эти явления тоже случайны, но условий $\boldsymbol{S}$ появления случайного события так много, их трудно или невозможно учесть, временные промежутки столь длинны, что отвечать на подобные вопросы теория вероятностей и математическая статистика не могут. Эти гипотезы не являются статистическими, поскольку в них не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения случайных величин. Ответить берутся лишь гипотетически, применяя математическое моделирование и экспертные компьютерные программы, в которые закладываются те или иные условия $\boldsymbol{S}$.

Исходя из назначения пособия, теория дисциплин излагается с некоторыми особенностями. Оно ведётся главным образом вокруг задачи, названной “Основной задачей”, которая обсуждается в главах 2, 3, 6 и для удобства чтения, формулировки условий задач в главах повторяются. Комбинаторные и вероятностные задачи приведены в ограниченном объёме, только для иллюстрации основных теоретических понятий. Доказательства теорем не приводится. Всё это легко дополнить из имеющейся литературы. Пособие должно отразить только одну, понятийную сторону теории обсуждаемых дисциплин.

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКА.

1. СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Эксперимент и его результаты – исходы

П р и м е р 1. Пусть проводят **эксперимент**, который состоит в подбрасывании одной монеты. Эксперимент завершается появлением единственного исхода. При подбрасывании монеты она может упасть на стол вверх, либо орлом (гербом) (**О**), либо решкой (цифрой) (**Р**), других исходов нет. Два исхода вместе появиться не могут. Исходами такого эксперимента будут две возможности: выпадение монеты верхом либо «**О**(рлом)», либо «**Р**(ешкой)». Никаких других исходов нет. Эксперимент не может закончиться без какого-либо исхода. Исход стать на ребро весьма маловероятен, а стать под углом к горизонту и вовсе противоречит законам физики, это невозможный исход.

Рис.1. Эксперимент по подбрасыванию одной монеты и элементарные (непосредственные) исходы

Исходами называют результаты **эксперимента**, один и только один из которых обязательно произойдёт при проведении эксперимента.

В данном примере исходами эксперимента могут быть:

О = {*выпал орел*};

Р = {*выпала решка*}.

Термины ***эксперимент, опыт, испытание*** тождественны, хотя термин ***эксперимент*** воспринимается как более общее понятие, чем ***опыт*** или ***испытание***, но в теории вероятностей чаще употребляются ***опыт или испытание***.

Непосредственные исходы опыта по подбрасыванию монеты **О** или **Р** неразложимы на другие более простые исходы. Для того чтобы подчеркнуть, что исходы **О** или **Р** неразложимы на более простые исходы, их называют ***элементарными исходами*** данного эксперимента по подбрасыванию монеты.

П р и м е р 2. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 2 монет одновременно. В результате эксперимента первая может упасть орлом вверх (**О**) или решкой вверх (**Р**).

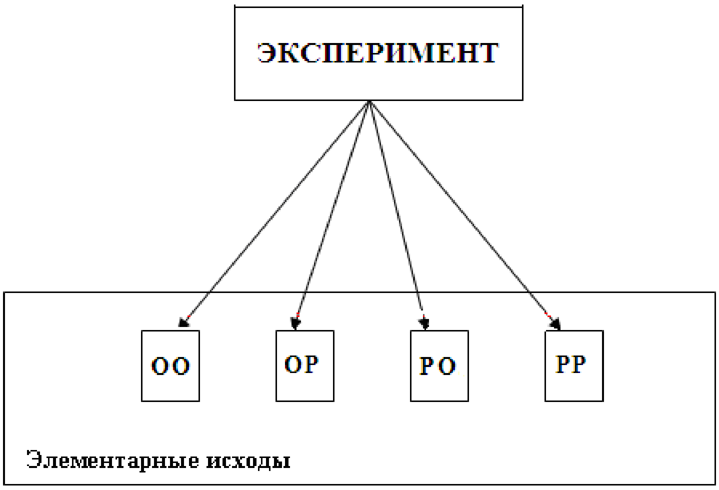


Рис.2. Эксперимент по подбрасыванию двух монет и его элементарные исходы

То же самое относится и ко второй монете, которая тоже может упасть вверх «орлом» (**О**) либо «решкой» (**Р**). Вследствие проведения такого эксперимента имеется уже четыре непосредственных результата, которые и называются **исходами** этого эксперимента. Запишем их в виде совокупности буквенных символов **ОО**, **ОР**, **РО**, **РР.** Любой исход, например **ОР**, будем считать элементарным для данного эксперимента по подбрасыванию двух монет.

П р и м е р 3. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 3 монет одновременно. ***Исходами*** будет какая-то одна ***комбинация*** из букв **О** или **Р**. Например, все монеты выпали «орлом», следовательно, имеем сочетание букв **ООО.**

Подсчитаем, сколько может быть таких комбинаций. На первом месте (в первой позиции) может быть только одна из букв **О** или **Р**:

О _ _ , **Р_ _ .**

На втором месте (на второй позиции) тоже может быть только **О** или **Р** и имеется 4 возможности

ОО_ , **ОР_ ,** **РО_ ,** **РР _ .**

На третьем месте (на третьей позиции) может быть тоже одна из двух букв **О** или **Р** и тогда к предыдущим 4 комбинациям добавляются ещё 4.

Имеем всего восемь комбинаций–исходов:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

Совокупность всех исходов называют пространством состояний **Ω** данного эксперимента.

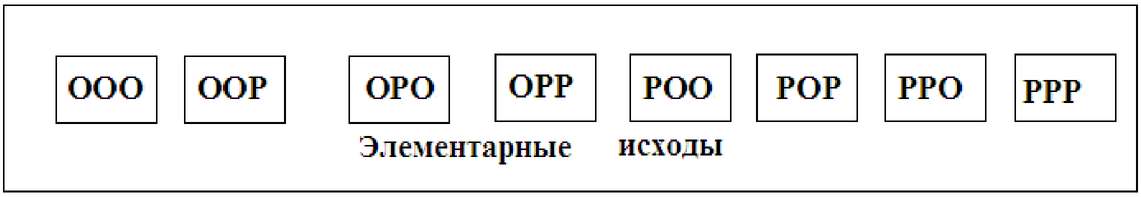


Рис.3. Совокупность элементарных исходов
по подбрасыванию трёх монет есть пространство состояний **Ω**

Отметим, что в исходах эксперимента порядок символов играет роль. Так, **ООР, ОРО, РОО** есть разные **комбинации** символов. События (исходы) **ООР, ОРО, РОО** разные.

П р и м е р 4. Пусть в урне находятся 3 черных шара и 7 красных шаров. Пусть проводится эксперимент: вынимают, не глядя, один шар. В результате эксперимента появится либо черный, либо красный шар. Событие ***А*** = {*появился черный шар*} есть случайное событие. Случайным событием будет и событие $\boldsymbol{B}$ = {*появился красный шар*}, рис. 4.

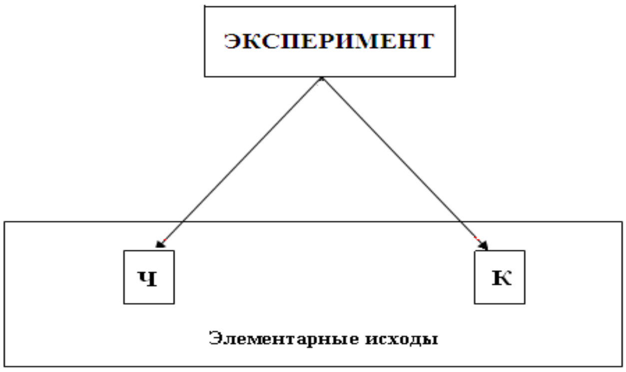


Рис.4. Эксперимент по выниманию шара
из урны и элементарные исходы

П р и м е р 5. Пусть в урне находятся 3 черных и 7 красных шаров. Пусть проводится эксперимент: вынимают, не глядя, один шар, затем вынимают второй шар. В результате проведения такого эксперимента имеется четыре результата, которые и называются **исходами** этого эксперимента. Запишем их в виде совокупности буквенных символов **ЧЧ, ЧК, КЧ, КК.** Любой исход, например **КК,** будем считать элементарным для данного эксперимента (рис.5).

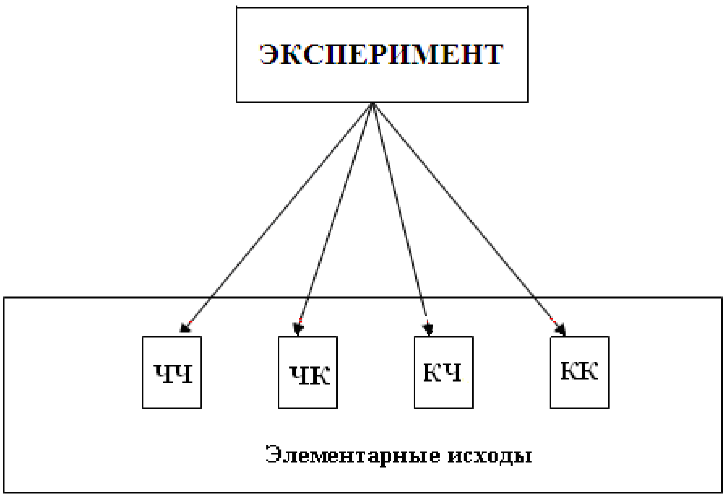


Рис.5. Эксперимент по выниманию 2 шаров
из урны и элементарные исходы

П р и м е р 6. Пусть в урне находятся 3 черных шара и 7 красных шаров. Пусть проводится эксперимент: вынимают, не глядя, один шар, затем вынимают второй, затем – третий.

В результате проведения такого эксперимента имеется восемь результатов, которые и называются **исходами** этого эксперимента. Запишем их в виде совокупности буквенных символов **ЧЧЧ, ЧЧК, ЧКЧ, ЧКК, КЧЧ, КЧК, ККЧ, ККК.** Любой исход, например **ККК,** будем считать элементарным для данного эксперимента по выниманию трех шаров из урны с возвратом.

П р и м е р 7. Стрелок один раз стреляет по мишени. Он может попасть в цель либо не попасть. Исходами эксперимента являются две возможности: «попадание» (**П**) или «непопадание» (**О**).

П р и м е р 8. Два стрелка стреляют по мишени одновременно. Каждый может попасть в цель (**П**) или промахнуться (**О**). Элементарными исходами опыта являются четыре возможности **ПП, ПО, ОП, ОО.**

П р и м е р 9. Три стрелка стреляют по мишени одновременно. Каждый может попасть в цель (**П**) или промахнуться (**О**). Элементарными исходами опыта являются восемь возможностей **ППП, ППО, ПОП, ПОО, ОПП, ОПО, ООП, ООО.**

П р и м е р 10. Орудие произвело два выстрела по цели. Попадание – (**1**), промах – (**0**). Тогда результатами (исходами) эксперимента будут четыре возможности **11, 10, 01, 00**.

П р и м е р 11: а) В урне 2 черных и 3 красных шара. Наугад берут два шара и следят за появлением очерёдности. Исходом опыта может быть только одна из четырёх возможностей. Четыре исхода образуют комбинации **К** и **Ч**. Исходы: **КК, КЧ, ЧК, ЧЧ;**

б) В урне **2** черных и **3** красных шара. Наугад берут два шара и в отличие от предыдущего примера не следят за появлением очерёдности (например, один экспериментатор достаёт, а другой находится в другой комнате и затем входит и смотрит, какой имеется исход. Перед ним два шара, и он не знает, в какой последовательности они вытащены, поэтому исходы «красный – черный» и «черный – красный» для него не отличаются). Так как очерёдность появления цвета не играет роли, то исходом опыта может быть только одна из трёх возможностей. Три исхода образуются из комбинации **К** и **Ч**. Элементарными исходами будут три комбинации символов: **КК, КЧ ≡ ≡ЧК, ЧЧ.** Комбинация **КЧ** тождественна комбинации **ЧК.**

П р и м е р 12. На полке стоят 3 книги в красном переплете (**К**) и 2 в черном (**Ч**). Берут наугад: а) две книги; б) три книги. Каковы исходы эксперимента?

Ре ш е н и е. По условию задачи предполагается, что очередность появления цвета несущественна:

а) имеется три исхода **КК, КЧ ≡ ЧК, ЧЧ;**

б) имеется три исхода: все книги красные **ККК**, две красные и одна черная **ККЧ ≡ КЧК ≡ ЧКК**, две черные и одна красная, **ЧЧК ≡ ЧКЧ ≡ КЧЧ.**

Мы имеем комбинации символов. Запись со знаком ≡ означает, что комбинации, имеющие одни и те же символы, отличаются только порядком следования символов в позициях, и не имеет смысла по условию задачи их различать.

Следует отметить, что порядок следования символов в комбинациях может быть важен по условию задачи или никакой роли не играть. Часто в задачах это не оговаривается и требуется смекалка для решения вопроса о том, нужно ли учитывать порядок символов или нет.

П р и м е р 13. Брошена одна игральной кубик, у которого на каждой грани отмечено различное количество точек – от 1 до 6. Довольно часто точки на гранях заменяют соответствующим числом и тогда говорят о выпадении чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Исходы эксперимента, – появление одной из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 на верхней грани кубика. Все исходы равновозможны.

П р и м е р 14: а) Брошены два игральных кубика. Кубики различают (первый и второй). Исходы эксперимента – появление одного из 36 чисел (возможны 36 элементарных событий):

11, 12, 13, 14, 15, 16,
21, 22, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 33, 34, 35, 36,
41, 42, 43, 44, 45, 46,
51, 52, 53, 54, 55, 56,
61, 62, 63, 64, 65, 66.

Все исходы равновозможны;

б) Брошены два игральных кубика. Если условие немного изменить и считать, что наблюдающий не знает, какой из кубиков первый, а какой второй, то исходов будет меньше, так как исход **12** будет считаться не отличимым от 21, 13 – от 31, 14 – от 41 и т.д.

Всего количество исходов равно 21. Элементарное событие эксперимента – появление только одного из 21 возможного исхода:

11, 12 ≡21, 13 ≡31, 14 ≡41, 15 ≡51, 16 ≡61,
22, 23 ≡32, 24 ≡42, 25 ≡52, 26 ≡62,
33, 34 ≡43, 35 ≡53, 36 ≡63,
44, 45 ≡54, 46 ≡64,
55, 56 ≡65,
66.

Элементарные исходы в эксперименте не равновозможные. Так, событие **11** не равновозможно событию **12 ≡ 21.** При многократном проведении эксперимента событие **11** будет встречаться реже, чем **12 ≡ 21**.

П р и м е р 15. Даны числа 5, 6, 7, 8. Записывают наугад: а) две цифры и получают двухзначное число; б) три цифры и получают трёхзначное число. Цифры в числе *не могут* повторяться. Сколько всего исходов (чисел) в экспериментах а) и б)? (Очевидно, при выборе цифр последовательность появления играет роль.)

Р е ш е н и е: а) На первую позицию в двухзначном числе можно поставить любую из 4 цифр, на вторую – любую из трёх оставшихся, следовательно, можно составить всего $4 \cdot 3 = 12$ двухзначных чисел.

б) На первую позицию в трёхзначном числе можно поставить любую из 4 цифр. На вторую позицию – любую из трёх оставшихся, $4 \cdot 3 = 12$ комбинаций. На третью позицию можно поставить любую из двух оставшихся цифр, поэтому имеем всего и $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ комбинации.

П р и м е р 16. Даны числа 5, 6, 7, 8. Записывают наугад: а) две цифры; б) три цифры. Цифры в числе *могут повторяться.* Сколько всего исходов в экспериментах а) и б) (Очевидно, при выборе цифр последовательность появления, играет роль.) Необходимо сравнить решение с примером 15.

Р е ш е н и е: а) На первую позицию в двухзначном числе можно поставить любую из 4 цифр, на вторую – тоже любую из 4 цифр, следовательно, можно составить всего $4 \cdot 4 = 16$ двухзначных чисел.

б) На первую позицию в трехзначном числе можно поставить любую из 4 цифр, на вторую – тоже любую из 4 цифр, следовательно, можно составить всего $4 \cdot 4 = 16$ двухзначных чисел. На третью позицию можно поставить тоже четыре цифры, и имеем $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ трехзначных числа.

П р и м е р 17. В вазе лежат мандарин (**М**), яблоко (**Я**), слива (**С**) и апельсин (**А**). Берут наугад: а) два фрукта; б) три фрукта. Каковы исходы (наборы фруктов)? (Очевидно, при выборе набора фруктов последовательность появления фрукта в наборе не играет роли для потребителя.)

Р е ш е н и е: а) **МЯ ≡ ЯМ, МС ≡ СМ, МА ≡ АМ, ЯС ≡ СЯ, ЯА ≡ АЯ.** Всего 5 наборов (или исходов).

б) Легко догадаться, что, убирая из вазы один фрукт, мы получаем нужный набор. Таких наборов (комбинаций) всего четыре: **МЯС, МЯА, МСА, ЯСА**. Другие возможные комбинации будут сводиться к перестановке символов, например: **МЯС ≡ МСЯ ≡ ЯМС ≡ ЯСМ ≡ СМЯ ≡ СЯМ**.

П р и м е р 18. Ученик знает 4 из 5 билетов и не знает один билет. Ему дают 2 билета. Ученику важно – знает он билет или не знает. Каковы исходы?

Р е ш е н и е. Если ученик вытянул билет, который знает, то обозначим эту возможность цифрой **1**, если не знает, то цифрой **0**. Результат опыта (исход) – наличие двух вытянутых билетов. Последовательность вытянутых билетов на экзамене роли не играет (не входит в условие $\boldsymbol{S}$ эксперимента). Тогда имеем всего два исхода опыта **11, 10 ≡ 01.** Это означает, что может быть только два варианта: либо оба билета ученик знает, либо из двух знает только один. Других исходов нет. Эти исходы не равновозможные.

Мы рассмотрели **эксперименты (опыты)** и **исходы (события)** экспериментов. Это фундаментальные понятия теории вероятности. Чтобы подчеркнуть, что события, появляющиеся в экспериментах, упростить нельзя или не рационально упрощать, такие события называют **элементарными исходами,** или **элементарными событиями эксперимента**. Слово «элементарный» иногда употребляют, иногда не употребляют, но всегда должно быть ясно, что элементарное событие не раскладывается на другие события (исходы).

Кроме элементарных исходов (событий) бывают составные (неэлементарные) события, которые рассматриваются как события, состоящие из совокупности более простых, элементарных событий.

1.2. Термины: эксперимент, опыт, испытания

Эксперимент есть совокупность условий $\boldsymbol{S}$. Вместо слова **эксперимент** часто говорят **опыт**. Тогда можно сказать элементарные события произведённого **опыта**. Под опытом или экспериментом понимают и другие явления, например, природные. Прогнозирование погоды есть эксперимент, в результате которого можно угадать или не угадать погоду через, например, 10 дней. Угадывание может произойти (**+**) или не произойти (**−**).

Ещё вместо терминов **эксперимент** или **опыт** часто употребляют термины **испытание, наблюдение.** Важно запомнить, что можно употреблять любое слово**: эксперимент, опыт, испытание, наблюдение.** Эти термины равнозначны, они тождественны по смыслу. Какое слово употребить, часто зависит от удобства выражения условия задачи, от намерения более изящно выразить мысль или даже личных предпочтений.

1.3. Термины: результаты опыта (событие, явления, исходы, случаи)

Термины **результат, события, явления** относятся к вполне определенному **эксперименту** и являются тождественными понятиями. Они первичны. Наиболее общие: **результат**, **события, явления.**

Термины исходы, случаи – частные виды событий, обладающих некоторыми свойствами. Далее остановимся на этом подробно.

Важно не путать понятия **эксперимент** (опыт, испытание, наблюдение) и **результат** (событие, явление, исход, случай).

Итак, имеются три равнозначных термина, наиболее часто употребляемых для обозначения того, что созданы условия ***S*****: эксперимент, опыт, испытание**. Для обозначения результатов эксперимента применяются четыре термина: **событие, явление, исход, случай.** Нужно следить за появлением того или иного термина, так как они иногда равнозначны, иногда не совпадают по объёму охватываемого понятия. Употребление того или иного термина или словосочетания обуславливается разными причинами: необходимостью коротко и правильно выразить мысль, сложившимися традициями, удобством восприятия, необходимостью выразить более ёмкое понятие коротким словом.

Н а п р и м е р, явление природы, явление опыта, исход опыта, исход эксперимента, событие в опыте, исход испытания, событие в испытании и т.д.

Таблица 1

Основные словосочетания теории вероятностей

	Эксперимент	**Опыт**	**Испытание**
Событие	Событие в эксперименте	Событие в опыте	Событие в испытании
Исход	Исход эксперимента	Исход опыта	Исход испытания
Случай	Случаи эксперимента	Случаи опыта	Случаи испытания
Явление	Явление в эксперименте	Явление в опыте	Явление в испытании

Из табл. 1 видно, что имеется по меньшей мере 12 комбинаций использования этих терминов.

Замечание 1. Бывают и другие более редко используемые термины, для обозначения результатов эксперимента: «**факты**», «**возможности**», «**гипотезы**», «**элементы**», «**точки**» и др. Почти все они встретятся далее.

Трудность употребления заключается в том, что нужно твердо знать объемы понятий терминов и словосочетаний и уметь отличать более общие термины от менее общих. Устранить трудность можно, только изучая теорию и решая практические примеры. Особенно важно для полного уяснения основ этой дисциплины знание аксиоматического определения вероятности, но оно может быть усвоено только после значительной практики по решению задач, когда появится потребность в строгом и точном понимании исходных положений этой дисциплины.

Замечание 2. Особое значение имеет словосочетание ***элементарные исходы*** (или просто ***исходы***) эксперимента, употребляемое для обозначения результатов эксперимента, которые не разложимы или которые нет смысла раскладывать на более простые исходы.

Замечание 3. Эксперимент завершается каким-либо одним элементарным исходом, два исхода не могут появиться вместе, т.е. любые два элементарных исхода ***несовместны***.

Замечание 4. Эксперимент завершается каким-либо одним элементарным исходом, эксперимент не может окончиться без появления какого-либо исхода. Поэтому совокупность всех возможных исходов в эксперименте называют ***полной группой событий*** данного эксперимента с условиями ***S***.

Замечание 5. Итак, вся совокупность элементарных исходов (**ЭИ**) любого эксперимента имеет два свойства: любые два **ЭИ** ***несовместны*** и вся совокупность **ЭИ** ***полна, образует полную группу*** (в том смысле, что в результате эксперимента из всей группы **ЭИ** произойдёт один и только один из исходов).

Замечание 6. Термином ***случаи*** эксперимента обозначают **ЭИ** эксперимента, которые обладают тремя свойствами – ***несовместности, образуют полную группу,*** и ***равновозможны.***

Обобщая примеры 1–17, можем изобразить схему:

Рис. 6. Условный рисунок, поясняющий тот факт, что эксперимент состоит из элементарных исходов, которые можно обозначить точками. Точки не имеют частей и **ЭИ** не состоят из других событий, поэтому **ЭИ** удобно изображать точками. Как видим, исходы можно называть **точ-**

ками и обозначать большими буквами

Для классического определения вероятности ***P*** вся совокупность элементарных исходов эксперимента (опыта) должны обладать тремя свойствами: события должны быть ***несовместны, равновозможны и образовывать полную группу***. Такие события, как выше уже отмечалось (замечание 6), называются ***случаями***. Эти понятия подробнее обсуждаются ниже.

1.4. Случайные события

Мы познакомились с понятием элементарных исходов (**ЭИ**). Будем теперь пользоваться более общим термином «**событие**». Нашей ближайшей целью будет введение понятия «**вероятности**», которое применяется к ***случайным событиям*** и обозначается через ***P***. Для этого вначале познакомимся, как математики понимают термин "***случайное событие***". Оценивая возможность наступления какого-либо события в эксперименте, мы часто говорим: «это очень возможно», «это непременно произойдет», «это маловероятно», «это никогда не случится». Купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем и не выиграть; завтра на уроке математики вас могут вызвать к доске, а могут и не вызвать; стреляя в тире, мы можем попасть в цель, а можем не попасть; вытягивая билет на экзамене, мы можем вытянуть билет, который знаем или который не знаем. Это хорошо известные примеры случайных событий, которые при условиях эксперимента ***S*** могут произойти, а могут и не произойти.

П р и м е р 1. Пусть проводят эксперимент, который состоит в подбрасывании одной монеты. При подбрасывании монеты она может упасть вверх либо «орлом» (гербом) (**О**), либо «решкой» (цифрами) (**Р**). В результате проведения эксперимента появится либо «орёл» (**О**), либо «решка» (**Р**). Элементарными событиями такого эксперимента будут два случайных события: **О** или **Р**. Итак, в данном эксперименте выпадение орла **О** есть случайное событие. Случайное событие – также появление «решки» **Р**. (Их можно назвать случайными элементарными исходами.)

П р и м е р 2. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 2 монет одновременно. В результате проведения такого эксперимента имеется 4 элементарных исхода. Событие, например **ОО,** может произойти, но может не произойти, поэтому оно есть случайное событие. Элементарными исходами такого эксперимента будут четыре случайных события: выпадение **ОО, ОР, РО, РР**. Итак, в данном эксперименте выпадение двух орлов **ОО** есть случайное событие. Случайное событие – также появление какого-нибудь другого элементарного исхода из совокупности **ОР, РО, РР**.

Термины ***«простое случайное событие»***, ***«элементарный исход»*** равнозначны, эквивалентны, между ними нет никакой разницы. Кроме ***простых (элементарных) событий*** рассматриваются и составные события.

1.5. Элементарные и составные события

Следующий шаг к точному определению математического понятия «вероятность события» состоит в уточнении разницы между двумя типами событий: **элементарными и составными**.

Составные события ещё называют неэлементарными событиями. Чтобы облегчить введение этого сложного понятия, вспомним, что такое натуральное число. Натуральное число состоит из совокупности единиц: 2 есть совокупность двух единиц, 3 есть совокупность трёх единиц и т.д. Пишут так:

$2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, $10 = 1 + 1 + \ldots + 1$ и т. д.

Натуральные числа можно представить как объединение равных чисел, например **$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$,** или

10 = 5 + 5.

Натуральные числа можно представить как объединение неравных чисел, например **10 = 3 + 7** или **10 = 2 + 3 + 5.** Итак, каждое ***натуральное число*** есть совокупность (объединение) некоторого количества **единиц** или некоторых **чисел**.

Сравните: составное событие состоит из совокупности (объединения) ***элементарных исходов***, или каких-либо ***событий***.

Другую аналогию можно привести из объектов геометрии. Элементарное событие изображают с помощью точки, тогда совокупность нескольких точек есть составное событие.

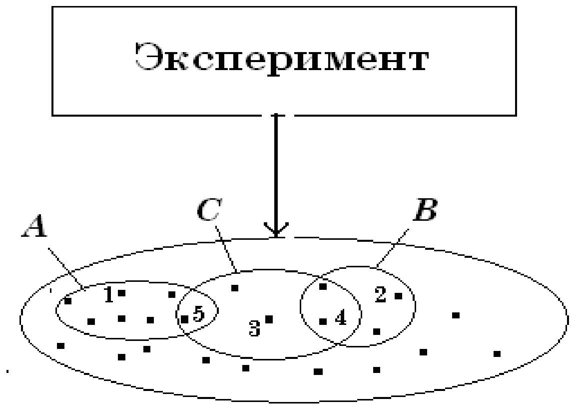


Рис. 7. Элементарные исходы 1, 2, 3, … не состоят из других событий, поэтому их удобно изображать точками, которые не имеют частей. Составные события ***A***, ***B***, ***C*** состоят из элементарных исходов, они есть объединение элементарных исходов

Когда в эксперименте реализуется какой-то элементарный исход, то считается, что произошло и составное событие, в которое этот исход входит. Например, если произошел исход, помеченный числом 1 (рис.7), то можно считать, что произошло и событие ***A***. Если произошел исход, помеченный числом 2, то считается, что произошло и событие ***B***. Если произошел исход, помеченный цифрой 3, то считается, что произошло и событие ***С.*** Если произошел исход, помеченный цифрой 4, то считается, что произошло событие ***В*** и ***С одновременно.*** События ***В*** и ***С*** – ***совместны***. Если произошел исход помеченный цифрой 5, то считается, что произошло и событие ***А*** и ***С одновременно.*** События ***А*** и ***С*** – ***совместны***. Очевидно, что события ***А*** и ***В*** одновременно появиться в эксперименте не могут, они не содержат общих элементарных исходов, они не совмещаются***, они несовместны.***

П р и м е р 1. Пусть проводят **эксперимент**, который состоит в подбрасывании одной монеты. При подбрасывании монеты она может упасть на стол вверх либо «орлом» (**О**), либо «решкой» (**Р**). В данном эксперименте имеется два элементарных исхода: **О** или **Р**. Исход **О** или **Р** неразложим на другие более простые исходы. Пространство событий **Ω** эксперимента состоит из совокупности двух исходов. Пишут так: **Ω = О + Р** и читают «***пространство событий Ω состоит из суммы двух элементарных событий***». Аналогия (но не полная) с натуральными числами здесь такая: **2 = 1 + 1.**

С = Ω = {выпал или «орел», или «решка»}.

D = {выпали одновременно «орел» и «решка»}.

Составное событие ***С*** = **Ω** состоит из объединения двух событий **О + Р**, и оно обязательно произойдет, так как обязательно выпадет или **О**, или **Р**. Составное событие ***С*** является достоверным. Оно произойдет со стопроцентной достоверностью (вероятностью).

Событие ***D*** состоит из пересечения (совмещения) двух событий **О** и **Р**, т.е. одновременного выпадения и **О** и **Р**, но **О** и **Р** не совмещаются. Очевидно, событие ***D*** не может никогда произойти. Событие ***D*** невозможное. Оно произойдет с нулевой достоверностью (т.е. не произойдет). Его вероятность равна нулю (ноль процентов).

П р и м е р 2. Если бросаем 2 монеты одновременно, то первая может упасть «орлом» вверх (**О**), а может упасть «решкой» вверх (**Р**). То же самое относится и ко второй монете, которая тоже может выпасть **О** или **Р** вверх. В этом примере имеется четыре возможности, которые и называются элементарными исходами этого эксперимента **ОО**, **ОР**, **РО**, **РР.** Пространство событий эксперимента состоит из совокупности четырех элементарных исходов **Ω = ОО + ОР + РО + РР.**

Пространство событий состоит из **объединения** четырех элементарных исходов (или **Ω** есть сумма четырёх исходов). Аналогия (но не полная) с натуральными числами здесь, например, такая: **8 = 2 + 2 + 2+ 2**.

Рассмотрим событие ***А*** эксперимента, которое состоит в том, что в результате проведения эксперимента по подбрасыванию двух монет выпадет не менее одного орла (выпадет хотя бы один орел):

А = {выпадет хотя бы один орел}.

Это событие является составным событием. Событие ***А*** происходит при появлении любого из трёх элементарных исходов: либо **ОР**, либо **РО**, либо **ОО**. В любом из этих трёх случаев появляются **либо один, либо два орла**. Событие ***А*** происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий: либо **ОР**, либо **РО,** либо **ОО.** Поэтому можно считать, что событие ***А*** состоит из объединения трёх элементарных исходов и писать (по аналогии с натуральными числами)

$$A = \mathbf{OP} + \mathbf{PO} + \mathbf{OO}.$$

Пространство событий эксперимента **Ω** можно представить в виде объединения двух исходов **Ω = А + РР.** Аналогия с натуральными числами здесь такая **8 = 6 + 2.**

Мы видим, что здесь есть определённая аналогия между понятием ***натуральное число***, состоящим из единиц, и понятием ***составное событие***, состоящим из элементарных исходов. Однако тут есть и различие. Натуральное число мыслится как появление сразу всей *совокупности* единиц, а составное событие ***А*** – как появление *только одного* элементарного исхода, из совокупности элементарных исходов, составляющих составное событие ***A***.

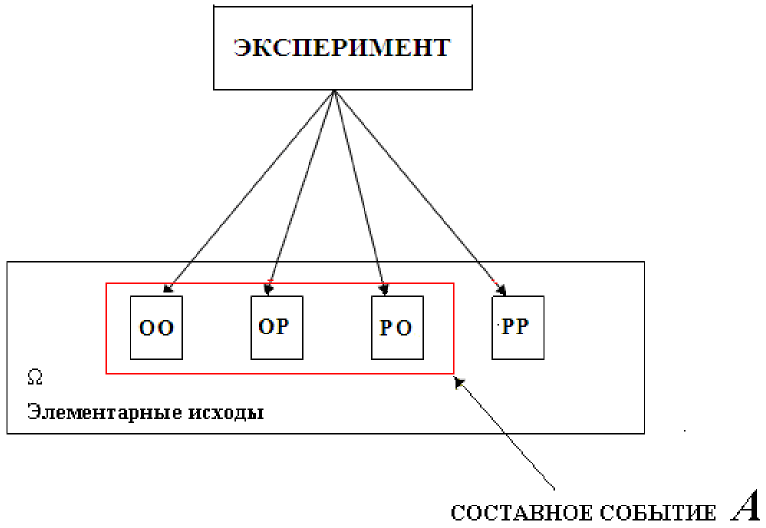


Рис. 8. Схема, отражающая понятия: эксперимент, пространство элементарных исходов, составное событие ***A***

Определение. Составным событием называется событие, которое состоит из объединения элементарных исходов. Говорят, что составное событие есть сумма элементарных исходов. Составное событие появляется в эксперименте, когда появляется один из элементарных исходов, входящий в сумму составного события.

Пусть в некотором эксперименте возможно событие ***A***. Если событие ***A*** происходит только при появлении одного события из совокупности E_1, E_2, …, E_n, то событие ***A*** называется суммой событий $A = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$

Рассмотрим ещё примеры.

П р и м е р 3. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 3 монет одновременно. Элементарным исходом будет какая-то одна комбинация из букв **О** или **Р** в трёх позициях. Условия эксперимента ***S*** те же, что и в примере 2. В пункте 1.1 было показано, что исходами эксперимента являются восемь следующих исходов:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

Восемь исходов случайны, образуют полную группу событий, равновозможны и несовместны.

Рассмотрим разнообразные составные события, запишем сумму элементарных исходов:

а) **А =** { *на одной монете появляется орёл* }

Рис. 9. Элементарные исходы и составное событие **А**

Ответ: ***A* = ОРР + РОР + РРО;**

б) ***B* =** {*на двух монетах появится орёл*}

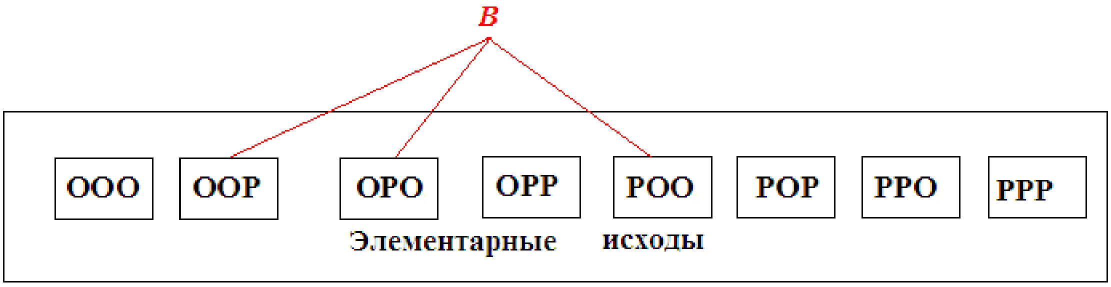


Рис. 10. Элементарные исходы и составное событие ***B***

Ответ: ***B* = ООР + ОРО + РОО**;

в) **С =** {*хотя бы на двух монетах появится орёл*}

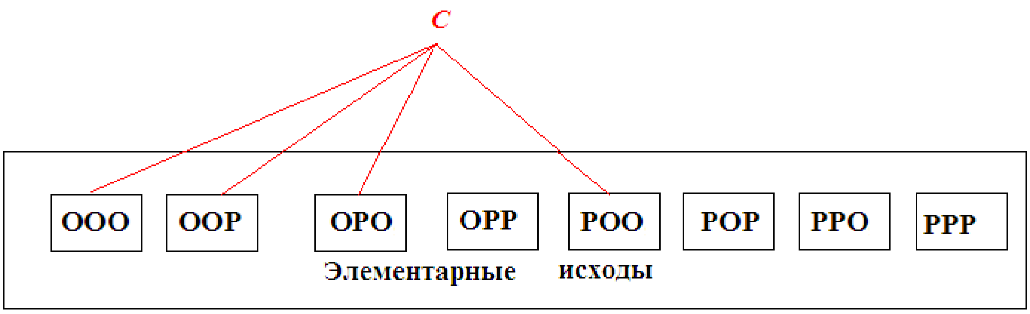


Рис. 11. Элементарные исходы и составное событие ***C***

Ответ: ***C* = ООО + ООР + ОРО + РОО**;

г) $\boldsymbol{D}$ = {*хотя бы на одной монете появится орёл*}

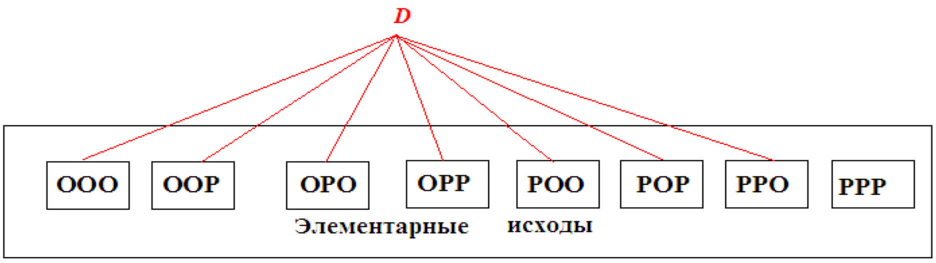


Рис. 12. Элементарные исходы и составное событие $\boldsymbol{D}$

Ответ:

$\boldsymbol{D}$ = **ООО + ООР + ОРО + ОРР + РОО + РОР + РРО.**

Итак, имеется некоторая аналогия между способами введения понятия натурального числа и понятия события, составленного из элементарных исходов. И число, и составное событие состоят из объединения элементов (число – из объединения единиц, составное событие – из объединения элементарных исходов), но имеется и отличие. Отличие состоит в том, что число всегда мыслится как вся совокупность единиц, а составное событие мыслится как возможность появления в эксперименте только одного элементарного исхода, входящего в это составное событие.

1.6. Примеры событий

Как простые, так и составные события мы обозначаем заглавными латинскими буквами и заключаем их описание в фигурные скобки, например:

$\boldsymbol{A}$ = {*при бросании монеты выпадет Орел*};

$\boldsymbol{B}$ = {*при бросании кубика выпадет шестерка*};

$\boldsymbol{C}$ = {*при бросании кубика выпадет четное число очков*};

$\boldsymbol{D}$ = {*при бросании кубика выпадет не менее* 4 *очков*}.

События $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – простые события, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ – составные. Все перечисленные события $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ — случайные. Есть события, которые в данных условиях **эксперимента** $\boldsymbol{S}$ произойти не могут. Их называют ***невозможными*** событиями.

Определение. Невозможным событием (при проведении эксперимента S) называется такое событие, которое не может произойти в данном эксперименте при условиях S.

Н а п р и м е р:

E = {*при бросании монеты она станет ребром*};

F = {*при бросании кубика выпадет семерка*};

G = {*при стрельбе из винтовки будет выбито больше очков, чем максимальное на мишени*}.

Все события ***E, F, G*** – невозможные.

Если же событие при данных условиях ***S*** обязательно произойдет, то его называют достоверным.

Определение. Достоверным событием (при проведении эксперимента S) называется такое событие, которое обязательно произойдёт в данном эксперименте S.

Н а п р и м е р:

H = {*при бросании монеты выпадет орёл или решка*};

J = {*при бросании игрального кубика выпадет число очков, меньшее 7*};

K = {*при вытаскивании шара из урны, где только красные шары, будет вынут красный ш*ар}.

Все события ***H, J, K*** – невозможные.

При рассмотрении случайных явлений очень важно рассматривать условия ***S*** проведения эксперимента, в результате которого происходят события. От условий эксперимента ***S*** зависит, будет ли событие достоверным, случайным, невозможным, будут ли события равновозможными, будут ли образовывать полную группу, будут ли совместными, будут ли зависимыми и т.п.

П р и м е р 1. Рассмотрим эксперимент, состоящий в бросании двух кубиков, и рассмотрим следующие события:

A = {*на кубиках выпало одинаковое число очков*};

B = {*сумма очков на кубиках не превосходит* 12};

C = {*сумма очков на кубиках равна* 11};

D = {*произведение очков на кубиках равно* 11}.

Требуется определить, какое из событий ***A***–***D*** случайно, достоверно и невозможно.

Р е ш е н и е.

Исход любого бросания можно описать двумя числами, выпавшими на кубиках. Например, (3, 1) означает, что на первом кубике выпало число 3, а на втором - число 1.

При исходе (1, 1) событие ***A*** происходит, а при исходе (1, 2) − не происходит. Значит, событие ***A*** случайное.

Событие ***B*** происходит при любом исходе: ведь каждое из двух чисел на кубиках не превосходит 6, а значит, их сумма не превосходит 12. Следовательно, событие ***B*** достоверное.

Событие ***C*** происходит при исходе (5, 6), но не происходит при исходе (2, 2). Значит, оно случайное.

Наконец, для события ***D*** нет исхода, при котором оно происходит: число 11 нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел. Значит, это событие невозможное.

Первое событие ***A*** случайное, второе ***B*** достоверное, третье ***C*** случайное, четвертое ***D*** невозможное.

П р и м е р 2. В урне **3** красных, **3** желтых, **3** зеленых шара. Вытаскиваем наугад **4** шара. Какие из следующих событий невозможные, какие – случайные, а какие – достоверные:

A ={*все вынутые шары одного цвета*};

B = {*все вынутые шары разных цветов*};

C = {*не все вынутые шары одного цвета*};

D = {*среди вынутых есть шары всех трех цветов*}.

Р е ш е н и е.

Событие ***A*** – невозможное: нельзя вытащить из коробки четыре шара одного цвета, так как в ней только по три шара каждого цвета.

Событие ***B*** – тоже невозможное: шары в коробке трех цветов, а вынимаем мы четыре шара.

Событие ***C*** – достоверное: все четыре шара, как мы уже выяснили, не могут быть одного цвета, поэтому среди них обязательно есть шары хотя бы двух разных цветов.

Событие ***D*** – случайное. Действительно, закодируем исходы опыта первыми буквами цветов, в которые окрашены вынутые шары. Например: **КЖЖЗ** означает, что вынули один красный, два желтых и один зеленый шар. **КЖЖЗ** это пример исхода, при котором событие ***D*** происходит, а **ККЖЖ** – пример исхода, когда событие ***D*** не происходит.

1.7. Вероятность случая

Понятия несовместности, равновозможности и полной группы событий важны для введения классической формулы для вычисления вероятности, поэтому более подробно рассмотрим эти понятия, введённые в параграфах 1.1 ÷ 1.4 , для элементарных исходов. Мы уже знаем, что в результате эксперимента появляется один и только один элементарный исход. Элементарные исходы попарно ***несовместны***. Все возможные элементарные исходы в эксперименте, образуют ***полную группу.*** При этом исходы могут быть ***равновозможными*** или ***не равновозможными***. Мы ввели утверждения и определения:

Утверждение. Вся совокупность элементарных исходов эксперимента образует полную группу, в том смысле, что в результате проведения эксперимента появится только один элементарный исход из этой совокупности и никакой другой появиться не может.

Утверждение. Любая пара элементарных исхо-

дов А и В из этой совокупности попарно несовместна, в том смысле, что если произойдет исход А, то не произойдёт исход В. Если происходит элементарный исход А, то никакой другой элементарный исход произойти не может. Поэтому говорят, множество всех элементарных исходов эксперимента несовместно в совокупности.

Определение. Элементарные исходы эксперимента называются равновозможными, если в результате проведения эксперимента нет оснований полагать, что один исход более возможен (предпочтителен), чем другой.

Рассмотрим эти понятия на примерах.

П р и м е р 1. При подбрасывании монеты она может упасть вверх либо «орлом» (**О**), либо «решкой» (**Р**). Элементарными исходами такого эксперимента будут две **О** или **Р**. Предполагается, что монета однородна, имеет несмещённый центр тяжести, имеет правильную форму, при подбрасывании монеты она многократно вращается в воздухе, падает на ровную твёрдую поверхность (стол). Совокупность этих условий обозначают буквой $\boldsymbol{S}$.

Совокупность элементарных событий в примере есть **О** или **Р**. Оба исхода случайны. Условия опыта $\boldsymbol{S}$ таковы, что появление исхода **О** исключает появление исхода **Р** и наоборот. Следовательно, элементарные исходы *несовместны*. Ясно, что и другой исход, кроме этих двух, невозможен (на ребро монета стать не может, это ничтожно маловероятный исход, а стать под некоторым углом на твёрдой поверхности и вовсе противоречит законам физики). Условия эксперимента позволяют заключить, что совокупность событий **О** и **Р** такова, что в результате эксперимента никакого другого события кроме этих двух появиться не может. Совокупность исходов **О** и **Р** обозначим через **Ω – это *полная группа***

$$\mathbf{\Omega = O + P.}$$

Понятно и то, что условия опыта ***S*** не дают оснований предполагать, что один из элементарных исходов **О** или **Р** более возможен, чем другой. Поэтому эти исходы **О** и **Р** **равновозможны.**

Элементарные события примера обладают тремя свойствами: они ***несовместны, образуют полную группу и равновозможны.***

Определение. Элементарные исходы, обладающие тремя перечисленными свойствами, называют случаями.

Рассмотрим случай в эксперименте ***A*** = {*выпадет* **О**} и найдём его вероятность классическим методом.

Всего в эксперименте $n = 2$ случая. Для появления события **ОО** имеется всего один исход $m = 1$, вероятность появления случая **ОО** равна отношению m к n

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{OO}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Другой исход **Р** имеют такую же вероятность равную 1/2.

П р и м е р 2. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 2 монет одновременно. В результате проведения такого эксперимента имеется четыре **элементарных исхода** эксперимента **ОО**, **ОР**, **РО**, **РР.**

Все четыре элементарных исхода случайны. Очевидно, исходы попарно несовместны. Появление одного исключает появление какого-то другого. В результате опыта по подбрасыванию монет с условиями ***S*** ясно, что произойдёт только одно из четырёх событий. Другой исход, кроме этих четырёх, невозможен. Поэтому исходы образуют ***полную группу***. Понятно и то, что условия опыта ***S***, не дают оснований предполагать, что какое-либо одно из четырёх исходов предпочтительнее других. Поэтому эти исходы ***равновозможны.***

Четыре исхода обладают тремя свойствами: ***несовместности, равновозможности и образуют полную группу, поэтому их можно назвать, согласно***

договоренности, случаями.

Рассмотрим случай в эксперименте $\boldsymbol{A}$ = {***выпадет*** **ОО**} и найдём его вероятность классическим методом.

Всего в эксперименте $n = 4$ случая. Для появления события **ОО** имеется всего один случай $m = 1$, вероятность появления случая **ОО** равна отношению m к n

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{OO}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}.$$

Другие исходы **ОР, РО, РР** имеют такую же вероятность, равную 1/4.

П р и м е р 3. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 3 монет одновременно. Элементарным исходом будет какая-то одна комбинация из букв **О** или **Р** в трёх позициях. Условия эксперимента $\boldsymbol{S}$ те же, что и в примере 1 и 2. В пункте 1.1 было показано, что исходами эксперимента являются восемь следующих исходов:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

Восемь исходов случайны.

В результате опыта по подбрасыванию монет с условиями $\boldsymbol{S}$ ясно, что появление любого из восьми исходов исключает появление какого-то другого из оставшихся семи. Следовательно, они попарно ***несовместны*** и произойдёт только одно из восьми событий и никакого другого быть не может. Восемь исходов образуют ***полную группу элементарных исходов.*** Интуитивно понятно и то, что условия опыта $\boldsymbol{S}$ не дают оснований предполагать, что какое-либо одно из восьми исходов предпочтительнее других. Следовательно, эти исходы ***равновозможны***.

Восемь элементарных исходов обладают тремя свойствами ***равновозможности, несовместности и образуют полную группу, поэтому их можно назвать, согласно договоренности, случаями эксперимента. В эксперименте по подбрасыванию трех монет имеется 8 случаев.***

Рассмотрим событие в эксперименте $\boldsymbol{A}$ = {*выпадет*

ООО} и найдём его вероятность классическим методом.

Всего в эксперименте n = 8 случаев. Для появления события $\boldsymbol{A}$ имеется всего один случай m = 1, вероятность появления события $\boldsymbol{A}$ равно отношению m к n

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} .$$

Каждое из других исходов **ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР** имеет такую же вероятность, равную 1/8.

П р и м е р 4. Пусть в урне находятся 3 черных шара и 7 красных шаров. Пусть проводится эксперимент: из урны вынимаются последовательно два шара. В результате проведения такого эксперимента имеется четыре результата, которые и называются **исходами** этого эксперимента. Запишем их в виде совокупности буквенных символов **ЧЧ, ЧК, КЧ, КК.** Любой исход, например **КК**, будем считать элементарным для данного эксперимента по выниманию двух шаров из урны.

В этом эксперименте четыре исхода. Они образуют ***полную группу и несовместны***. Однако интуитивно понятно, что эти четыре исхода ***не являются равновозможными.*** При многократном проведении эксперимента по вытаскиванию двух шаров комбинации будут появляться не одинаково часто. Эти элементарные исходы нельзя назвать ***случаями.*** Пространство состояний **Ω** эксперимента состоит из суммы элементарных исходов.

$$\mathbf{\Omega = ЧЧ + ЧК + КЧ + КК.}$$

Однако **событие** в этой задаче можно рассматривать как элементарный исход, а при изменении условий **S** может потребоваться разложить событие на ***произведение*** двух событий, которые и будут считаться элементарными.

Например, событие **ЧЧ** есть совмещение двух исходов **Ч1** = {***первый вынутый шар черный***} и **Ч2** = {***второй вынутый шар черный***}. Тогда **ЧЧ** есть совместное появление двух событий **Ч1** и **Ч2**. Договорились, в таких случаях совместного появления двух событий рассматривать их совместное появление как произведение событий с помощью знака умножения, т.е. **ЧЧ = Ч1 · Ч2**.

1.8. Обобщение понятий на составные события

П р и м е р 1. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 2 монет одновременно. В результате проведения такого эксперимента имеется четыре **элементарных исхода7** эксперимента **ОО**, **ОР**, **РО**, **РР.**

Пусть ***A*** = {**ОО+ОР**}; ***B*** = {**РО+РР**}.

События ***A*** и ***B*** случайны. Условия опыта ***S*** таковы, что появление события ***A*** исключает появление события ***B*** и наоборот. Следовательно, события ***несовместны***. Никакое другое событие, кроме этих двух, невозможно. Условия эксперимента позволяют заключить, что совокупность событий **А** и **В** такова, что в результате эксперимента никакого другого события кроме этих двух появиться не может. Совокупность исходов **А** и **В** обозначим через **Ω – это *полная группа***

$$\Omega = A + B.$$

Понятно и то, что условия опыта ***S*** не дают оснований предполагать, что одно из событий ***A*** или ***B*** более возможно, чем другое. Поэтому эти исходы **А** и **В** **равновозможны.**

События ***A*** и ***B*** обладают тремя свойствами: ***они несовместны, образуют полную группу и равновозможны.***

Определение. Любая пара событий А и В некоторого опыта называется несовместной, если появление одного события исключает появление другого события.

Или короче. ***События А и В называют несовместными, если они не могут*** произойти одновременно в данном опыте.

Определение полной группы ***исходов*** можно распространить и на составные события, с одной оговоркой, что в результате эксперимента появляется хотя бы одно из них.

Определение. Полная группа событий эксперимента есть совокупность событий, когда в результате эксперимента появляется хотя бы одно из них (и никакого другого появиться не может).

Поясним примером. В примере с бросанием двух монет есть два события:

C = {**ОО+ОР+РО**}; ***D*** = {**РО+РР**}.

Эти события образуют полную группу, так как при исходах **ОО** или **ОР** происходит событие ***C***, а при исходе **РР** происходит событие ***D*.** При исходе **РО** происходят одновременно два события – ***C*** и ***D*.**

Определение. События эксперимента называются равновозможными, если в результате проведения эксперимента нет оснований полагать, что одно событие более возможно (предпочтительно), чем другое.

События ***A*** и ***B*** – равновозможны; ***C*** и ***D*** **–** не равновозможны.

Определение. Событие называют элементарным, если его невозможно или нецелесообразно по условию задачи рассматривать как состоящее из других ещё более элементарных событий.

Докажем, что если события элементарные, то они и несовместные. Действительно, предположим противное тому, что утверждается, а именно, что какие-то два элементарных события ***A*** и ***B*** совместны, но тогда совместное появление ***A*** и ***B*** означает, что появляется исход, который входит в событие ***A*** и ***B***, но ***A*** и ***B***, как сказано, не могут содержать никаких других событий, так как они элементарны. Следовательно, предположение о совместности элементарных событий неверно.

События ***A*** и ***B*** в примере с бросанием двух монет можно считать элементарными событиями, которые несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Вероятность события ***A*** в этом примере равна 1/2, так как всего элементарных событий $n = 2$, а элементарное событие $\boldsymbol{A}$ одно $m = 1$.

Определение. События в эксперименте, обладающие тремя перечисленными свойствами, называют случаями.

П р и м е р 2. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. В этом примере 6 элементарных исходов: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$. Исход ω_i означает, что в результате эксперимента выпало $\boldsymbol{i}$ очков. Они попарно ***несовместны равновозможны и образуют полную группу***. Полная группа элементарных исходов называется ***пространством состояний эксперимента*** $\boldsymbol{\Omega}$. Например, исходы в количестве 5: ω_1, $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ – не образуют полной группы, так как в результате эксперимента может появиться ω_6.

Пусть:

$\boldsymbol{A}$ = {*выпадение* 4 *очков*};

$\boldsymbol{B}$ = {*выпадение* 3 *очков*};

$\boldsymbol{C}$ = {*выпадение четного числа очков*};

$\boldsymbol{D}$ = {*выпадение нечетного числа очков*};

$\boldsymbol{E}$ = {*выпадение не менее* 4 *очков*}.

Очевидно, что события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ − несовместные; $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ − совместные; $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ − несовместные; $\boldsymbol{A}$ ***и*** $\boldsymbol{C}$ – совместные; $\boldsymbol{B}$ ***и*** $\boldsymbol{D}$ − совместные.

События $\boldsymbol{F} = \omega_1 + \omega_2$, $\boldsymbol{G} = \omega_3 + \omega_4$, $\boldsymbol{H} = \omega_5 + \omega_6$ являются случаями, потому что образуют полную группу $\Omega = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{H}$; попарно несовместны $\boldsymbol{F} \bigcap \boldsymbol{G} \bigcap = \varnothing$, $\boldsymbol{F} \bigcap \boldsymbol{H} = \varnothing$; $\boldsymbol{G} \bigcap \mathbf{H} = \varnothing$ и равновозможны. Здесь $\varnothing$ – невозможное событие.

1.9. Способ вычисления вероятности события

Термин «вероятность» относится к первичным понятиям математики, поэтому смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах. Это нестрогое введение, но в дальнейшем его смысл мы будем уточнять и дополнять. В пункте 5.4 дадим аксиоматическое определение вероятности, математически строгое по современным меркам.

Буква $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ обозначает вероятность некоторого события $\boldsymbol{A}$. Это обозначение произошло от английского и французского слов *probability* – возможность, вероятность. За единицу измерения вероятности случайных событий принята **1**. Вероятность достоверного события равна **1**. Вероятность невозможного события принята за **0**.

П р и м е р 1. Рассмотрим событие в эксперименте по подбрасыванию монеты $\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{O}$ или $\mathbf{P}\}$.

При подбрасывании монеты событие $\mathbf{\Omega}$ произойдёт со стопроцентной вероятностью, так как обязательно выпадет либо **О**, либо **Р**. Присвоим достоверному событию $\mathbf{\Omega}$ вероятность, равную 1, и будем писать

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{\Omega}) = 1.$$

Пусть $\boldsymbol{B}$ = {*монета выпадет ребром*}, это невозможное событие $\boldsymbol{B} = \varnothing$, тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = 0.$$

Двум другим случайным исходам: **О** и **Р** в силу того, что они образуют полную группу, равновозможны и несовместны, разумно приписать вероятность, равную по 1/2:

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{O}) = 1/2 \qquad и \quad \boldsymbol{P}(\mathbf{P}) = 1/2.$$

Другими словами, можно сказать так. Всего в эксперименте два $n = 2$ исхода, они образуют полную группу (в результате проведения эксперимента не может появиться никакого события кроме «орла» или «решки») и равновозможны (нет оснований полагать, что событие **О** более или менее предпочтительно, чем событие **Р**) и несовместны (одновременно **О** и **Р** выпасть не могут). Для появления события **О** имеется всего один исход $\boldsymbol{m} = 1$ (при другом исходе появляется **Р**), поэтому разумно определить вероятность появления **О** как отношение $\boldsymbol{m}$ к $\boldsymbol{n}$

$$P(\mathrm{O}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, вероятность ***P*** события выпадения «решки» ***P*** определится точно так же, отношением 1/2.

П р и м е р 2. Если бросаем две монеты одновременно, то имеется четыре возможности, **OO, OP, PO, PP** и их количество обозначается через $n = 4$.

Рассмотрим событие эксперимента ***A***, которое состоит в том, что в результате проведения эксперимента выпадет не менее одного «орла».

A = {*появится не менее одного орла*}.

Событие ***A*** происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий: либо **OO**, либо **OP**, либо **PO**. Говорят, что эти исходы благоприятствуют появлению события ***A*** . Мы договорились считать, что событие ***A*** состоит из суммы трёх элементарных исходов

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{OP} + \mathbf{PO} + \mathbf{OO}.$$

Элементарные исходы **OO, OP, PO** входят в составное событие ***A.***

Термины «***количество исходов, в результате которых появляется событие*** A», и «***количество исходов благоприятствующих появлению события A***», тождественны.

Когда далее в тексте будет появляться термин «событие», то специально не оговаривается, что под ним понимают либо элементарный исход, либо составное событие. Это должно быть ясно из контекста.

Из рис. 13 видно, что $m = 3$, $n = 4$ и для вычисления вероятности составного события ***A*** = {*появится хотя бы один орел*} нужно 3 разделить на 4 и получим $P(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}$.

П р и м е р 3. Рассмотрим эксперимент с двумя монетами. Найти вероятность события ***E*** **= OO + OP.**

Р е ш е н и е. Четыре элементарных исхода **OO**, **OP**, **PO**, **PP** образуют полную группу, равновозможны и несовместны. Событию $\boldsymbol{E}$ благоприятствуют 2 случая **ОО и ОР.** Всего случаев 4**.** Поэтому $\boldsymbol{P(E)} = 2/4 = 1/2$.

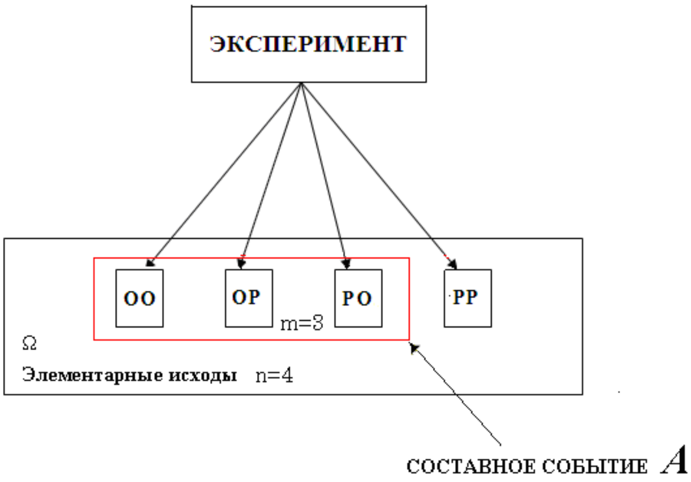


Рис. 13. Схема отражающая понятия: эксперимент, пространство элементарных исходов, составное событие $\boldsymbol{A}$

П р и м е р 4. Рассмотрим тот же эксперимент с двумя монетами. Найти вероятность события $\boldsymbol{E} =$ **ОО + ОР.**

Решим другим способом**.** Рассмотрим два события

$\boldsymbol{E}$ **= ОО + ОР,** $\boldsymbol{F}$ **= РО + РР**.

Эти события образуют полную группу: $\boldsymbol{E + F = \Omega}$ **.**

События $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ несовместны и равновозможны, образуют полную группу т. е. $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ можно считать элементарными случаями. Всего есть 2 случая $\boldsymbol{E}$ **и** $\boldsymbol{F}$**.** Поэтому $\boldsymbol{P(E)} = 1/2$**.**

Замечание. Из сравнения решения примера 2 и 3 видно, что для вычисления вероятности некоторого события $\boldsymbol{A}$ в эксперименте классическим способом надо пространство состояний эксперимента разбить на элементарные события (или исходы), обладающие тремя свойствами: несовместности, равновозможности, и которые образуют полную группу, количество которых обозначается через $\boldsymbol{n}$. Эти события назовем случаями. Затем следует подсчитать количество $\boldsymbol{m}$ случаев, благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$**,** и найти отношение $\boldsymbol{m}$ к $\boldsymbol{n}$.

Классически вероятность элементарного исхода определяется следующим образом:

Определение. Вероятностью события А при проведении эксперимента S называют дробное число Р, равное отношению количества исходов, в результате которого появляется событие А, к общему числу всех несовместных, равновозможных и образующих полную группу элементарных исходов этого эксперимента.

Замечание. Термин «исход» можно заменить термином «элементарное событие».

Мы договорились ранее, что для сокращения слов соблюдать и специально не оговаривать следующую **договорённость**: ***если элементарные исходы (события) эксперимента S образуют полную группу, несовместны и равновозможны, то называть исходы будем «случаями».***

Если учесть эту договоренность, то определение вероятности для события $\boldsymbol{A}$ можно сформулировать короче.

Определение. Вероятностью события А в эксперименте S называют дробное число Р, равное отношению количества случаев, благоприятствующих А, к общему числу всех случаев этого эксперимента.

Если нет случаев, благоприятствующих событию $\boldsymbol{A}$, т.е. $m = 0$, то такое событие будет невозможным и обозначается $\varnothing$. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю:

$\boldsymbol{P}(\varnothing) = 0/\boldsymbol{n} = 0.$

Если событию $\boldsymbol{A}$ благоприятствуют все случаи, т.е. $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, то такое событие будет достоверным и обозначается $\boldsymbol{\Omega}$. Вероятность достоверного события равна единице

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{n}/\boldsymbol{n} = 1$.

П р и м е р 4. Бросают четыре монеты. Следует поставить вопросы и найти ответы, используя для образования составного события слова «хотя бы...», «не менее...», «только...», «не более...». Вычислить вероятности составных событий.

Замечание. Термин «не менее...» эквивалентен «более или равно...», термин «не более…», эквивалентен «менее или равно...».

1.10. Краткий итог

Результаты эксперимента (опыта или наблюдения) называют событиями. Если производится опыт, то в результате может произойти или не произойти некоторое событие: такие события называют случайными событиями. Если говорят о событиях, то имеется в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным опытом S.

В любом опыте S:

а) если в результате опыта событие A обязательно происходит, то его называют ***достоверным***;

б) если событие A не может произойти в данном опыте, то его называют ***невозможным***;

в) если событие A рассматривается как не разложимое на другие события, то оно называется ***элементарным событием или элементарным исходом***;

г) если при каждом проведении эксперимента появляется одно и только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то их называют ***элементарными исходами и не раскладывают на другие события***;

д) если два события A и B не могут произойти одновременно в одном опыте то они называются ***несовместными***;

е) если каждая пара из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместна в некотором опыте, то события называют ***попарно несовместными***;

ж) если при каждом проведении эксперимента появляется хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (элементарных или не элементарных), то совокупность этих событий называют ***полной группой***.

Теорема. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу и попарно несовместны, то в результате эксперимента появится одно и только одно из этих событий (т.е. события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **есть** элементарные исходы эксперимента);

з) если при каждом проведении эксперимента нет оснований предполагать, что одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будет встречаться чаще, чем другие, то события называются ***равновозможными***;

и) если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу, несовместны и равновозможны***, то их называются ***случаями.***

1.11. Задачи на вычисление вероятностей

Задачи взяты главным образом из учебника [7].

Задача 1. При игре в лото используют фишки с номерами от 1 до 90. Наудачу вынимается одна фишка. Какова вероятность события:

а) $\boldsymbol{A}$ = {*номер вынутой фишки делится на* 10};

б) $\boldsymbol{B}$ = {*номер вынутой фишки делится на* 5 *и на* 9};

в) $\boldsymbol{C}$ = {*номер вынутой фишки делится на* 100};

г) $\boldsymbol{D}$ = {*номер вынутой фишки делится на* 7 }?

Р е ш е н и е. В эксперименте по вытаскиванию фишки имеется 90 случаев выпадения чисел от 1 до 90, поэтому n = 90:

а) Событию $\boldsymbol{A}$ благоприятствует 9 случаев. Следовательно, $m = 9$.

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = 9/90 = 1/10$;

б) Событию $\boldsymbol{B}$ благоприятствует всего 2 случая, это случаи 45 и 90. Следовательно, $m = 2$.

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = 2/90 = 1/45$;

в) Событию $\boldsymbol{C}$ не благоприятствует ни один случай. Следовательно, $m = 0$.

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = 0/90 = 0$.

г) Событию D благоприятствует всего 12 случаев, это 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84. Следовательно, $m = 12$

$P(D) = 12 / 90 = 2 / 15$.

Задача 2. Ученик задумал натуральное число, не превышающее 100. Какова вероятность того, что число а) четное; б) делится на 4; в) делится на 10; г) при делении на 10 дает в остатке 7.

Р е ш е н и е аналогично решению задачи 1.

Задача 3. Используя некоторые из четырех цифр 1, 2, 3, 4 , без повторения записали двухзначное число. Какова вероятность, что вы угадаете число с первого раза?

Р е ш е н и е. Всего двухзначных чисел из 4 цифр можно составить в количестве $4 \cdot 3 = 12$. Чисел, благоприятствующих угадыванию, всего одно. Поэтому вероятность равна 1/12.

Задача 4. Используя некоторые из четырех цифр **1, 2, 3, 4,** записали двухзначное число (цифры числа могут быть одинаковые). Какова вероятность, что вы угадаете число с первого раза?

Р е ш е н и е. Всего двухзначных чисел из 4 цифр с повторением можно составить $4 \cdot 4 = 16$. Благоприятствующих угадыванию чисел всего одно. Поэтому вероятность равна 1/16.

Задача 5. Четыре футбольные команды **К1, К2, К3, К4** вышли в полуфинал мирового первенства. Специалисты считают, что их силы примерно равны. Какова вероятность события:

А) A = {команды **К1, К2** выйдут в финал}.

Б) B = {команды займут места с первого по четвертое в указанном порядке **К1, К2, К3, К4**}.

В) C = (команда **К1** получит «золото», команда К2 получит «серебро»).

Р е ш е н и е. Пронумеруем команды числами 1, 2, 3, 4.

А) В финале имеется две позиции: первое место и второе. Так как силы примерно равны, то исходы мы можем назвать случаями. Имеется ровно шесть 12 ≡ 21, 13 ≡ 31, 14 ≡ 41, 23 ≡ 32, 24 ≡ 42, 34 ≡ 43 случаев командам выйти и распределиться в финале. Благоприятствующих случаев выйти в финал именно командам 1 и 2 имеется ровно один случай, это: 12 ≡ 21. Поэтому вероятность события ***A*** равна 1/6.

Б) Так как силы команд примерно равны, нужно считать все исходы опыта равновозможными и всего событий командам разместиться по порядку есть 24 случая, так как случайно на первом месте может оказаться любая из 4 команд, на втором месте любая из 3 оставшихся, на третьем месте – любая из 2 оставшихся и на четвертом месте оставшаяся четвертая $n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Благоприятствует распределению команд в порядке 1–2–3–4 всего один случай. Поэтому вероятность события ***B*** равна 1/24.

В) Благоприятствуют событию ***C*** всего два случая 1–2–3–4 и 1–2–4–3, когда на первом месте команда **К1**, на втором **К2**, а на двух оставшихся могут разместиться команды **К3** и **К4** в произвольном порядке. Всего событий командам разместиться произвольно в финале – 24 случая. Поэтому вероятность события ***C*** равна 2/24 = 1/12.

2. КОМБИНАТОРИКА

Для подсчета вероятности ***P*** события приходится подсчитывать количество событий в эксперименте. В тех экспериментах, в которых ***m*** и ***n*** велико, приходится, для их подсчёта использовать правила комбинаторики. Термин «комбинаторика» произошёл от слова ***комбинировать***, брать комбинации объектов (предметов, чисел, букв, предметов, событий и т.п.). В комбинаторике термины ***комбинация, соединения, последовательность объектов (элементов, символов)*** тождественны.

Подсчет количества всех возможных элементарных исходов в испытании и количества элементарных исходов, благоприятствующих появлению составного события, часто производят с помощью **принципа умножения** или, как его иначе называют, **основного правила комбинаторики**. Реже для подсчёта возможных элементарных исходов в эксперименте приходится применять другой принцип комбинаторики – **принципа сложения**.

2.1. Комбинаторное правило умножения

П р и м е р 1. Из дома до школы можно дойти 3 путями, а от школы до стадиона 2. Сколькими способами можно дойти от дома до стадиона?

Р е ш е н и е. Выбрав один из 3 возможных путей от дома до школы, имеем две возможности выбрать путь от школы до стадиона, поэтому всего количество разных путей от дома до стадиона равно $3 \cdot 2 = 6$.

П р и м е р 2. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 3 монет одновременно. Элементарным исходом будет какая-то одна комбинация букв. Например, все монеты выпали орлом и имеем сочетания букв **ООО.** Требуется подсчитать, сколько элементарных исходов имеет этот эксперимент.

Р е ш е н и е. Подсчитаем количество элементарных исходов, рассуждая так: первая монета имеет 2 возможности выпасть «орлом» или «решкой». Вторая имеет тоже две возможности и всего имеется $2 \cdot 2 = 4$ комбинации. Третья монета имеет ещё 2 возможности и всего имеется $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ исходов (комбинаций символов):

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

П р и м е р 3. Пусть имеется две урны. В первой урне 3 пронумерованных шара (1–3), во второй – 4 пронумерованных шара (4–7). Опыт состоит в том, что из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Сколько всех элементарных событий в этом опыте?

Р е ш е н и е. Элементарными исходами будут всевозможные пары шаров. Количество различных пар очевидно равно $3 \cdot 4 = 12$. Перечислим их: **(1,4); (1,5); (1,6); (1,7); (2,4); (2,5); (2,6); (2,7); (3,4); (3,5); (3,6); (3,7).**

П р и м е р 4: а) сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3? б) сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3? Цифры в числе можно повторять.

Р е ш е н и е. На первом месте может быть любая из цифр 1, 2, 3, на втором месте – любая из четырёх цифр 0, 1, 2, 3, 4. Тогда всего двухзначных чисел можно составить $3 \cdot 4 = 12$. Составим таблицу, в которой содержатся все комбинации цифр.

	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

Количество ячеек в таблице определяется перемножением количества строк на количество столбцов.

П р и м е р 5. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании 4 монет одновременно. Элементарным исходом будет какая-то одна комбинация букв. Например, все монеты выпали «орлом», и имеем сочетания букв **ОООО.** Требуется подсчитать, сколько элементарных исходов имеет этот эксперимент.

Р е ш е н и е. Подсчитаем количество элементарных исходов, рассуждая так: первая монета имеет 2 возможности выпасть «орлом» или «решкой». Вторая имеет тоже две возможности и всего имеется $2 \cdot 2 = 4$ возможности. Третья монета имеет ещё 2 возможности, и всего имеется $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ возможностей (исходов). Четвертая монета имеет ещё 2 возможности и всего имеется $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 =$ $= 16$ исходов.

П р и м е р 6. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании $\boldsymbol{n}$ монет одновременно. Элементарным исходом будет какая-то одна комбинация букв. Например, все монеты выпали «орлом» и имеем сочетания из n букв **ОООО… О.** Требуется подсчитать, сколько элементарных исходов имеет этот эксперимент.

Р е ш е н и е. Подсчитаем количество элементарных исходов, рассуждая так: первая монета имеет 2 возможности выпасть «орлом» или «решкой», вторая имеет тоже две, третья монета имеет ещё 2 возможности и т. д. Таким образом, всего имеется $m = 2^n$ исходов.

Например, при $n = 5$ количество исходов равно $m = 2^5 = 32$; при $n = 6$, $m = 2^6 = 64$, при $n = 7$, $m = 2^7 = 128$; $n = 8$, $m = 2^8 = 256$; $n = 9$, $m = 2^9 = 512$; $n = 10$, $m = 2^{10} = 1024$. Вообще количество исходов в эксперименте с n монетами равно 2^n.

Во всех примерах мы использовали один и тот же приём – принцип умножения.

Принцип умножения. Пусть дано некоторое множество (совокупность) объектов S. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать из совокупности объектов n способами, то пару объектов (A, B) в указанном порядке можно выбрать (скомбинировать) $m \cdot n$ способами.

В первом примере была дана совокупность дорог, во втором символы **О** или **Р**, в третьем числа от **1** до **7**, в четвертом числа от **0 до 3**.

Этот принцип формулируют и другим способом.

Вторая формулировка. Пусть надо выполнить два действия одно за другим. Если первое действие можно выполнить m способами, а второе n способами, то два действия в указанном порядке можно выполнить $m \cdot n$ способами.

В более общем виде принцип умножения формулируется следующим образом.

Третья формулировка. Пусть надо выполнить k действий одно за другим, каждое из которых можно выполнить n_k способами, то все k действий можно выполнить

$$k = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_i^k n_i$$

способами.

2.2. Комбинаторное правило сложения

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 1. Из дома до школы можно дойти 3 путями или доехать 2 путями. Сколькими способами можно добраться от дома до школы?

Р е ш е н и е. Если до школы можно дойти тремя способами, а доехать двумя способами, то добраться до школы можно пятью способами: 3 + 2 = 5.

П р и м е р 2. В группе учеников три мальчика и две девочки. Сколько существует способов выбора пары учеников одного пола, т.е. либо мальчиков, либо девочек.

Р е ш е н и е. Очевидно, двух мальчиков можно выбрать из множества учащихся тремя способами, а пару девочек – только одним (порядок пары не учитывается). Тогда всего способов выбора пары учащихся будет следующим: 3 + 1 = 4 способа.

Подробнее поясним задачу. Пронумеруем мальчиков цифрами 1, 2, 3, а девочек 4, 5. Тогда имеется всего четыре комбинации: 12 ≡ 21, 13 ≡ 31, 23 ≡ 32, 45 ≡ 56. Здесь запись, например 12 ≡ 21, означает, что пара, в которой выбран сначала первый мальчик, а затем второй, не отличается от пары, в которой сначала выбран второй мальчик, а затем первый. Или, если в первую позицию помещена цифра 1, а во вторую цифра 2, то эта комбинация не отличается от комбинации, в которой в первую позицию помещена цифра 2, а во вторую цифра 1. В этой задаче комбинации, в которых порядок чисел разный, считаются ***неразличимыми***.

Теперь рассмотрим задачу, в которой порядок следования чисел в комбинации существенен.

П р и м е р 3. В группе учеников три мальчика и две девочки. Сколько существует способов выбора пары дежурных одного пола, т.е. либо мальчиков, либо девочек (причем в паре есть старший и помощник).

Р е ш е н и е. Пронумеруем мальчиков цифрами 1, 2, 3, а девочек 4, 5. Нетрудно сообразить, что двух дежурных мальчиков можно выбрать из пяти учащихся шестью способами: 12, 21, 13, 31, 23, 32 , а пару дежурных девочек – двумя – 45, 56, (порядок пары учитывается). Тогда всего способов выбора пары дежурных будет равен 6 + 2 = 8 способов.

П р и м е р 4. В группе учеников 4 мальчика и 3 девочки. Сколько существует способов выбора пары учеников одного пола с учетом того, что в паре должен быть старший и помощник.

Р е ш е н и е. Двух мальчиков можно выбрать из семи учащихся (с учётом порядка появления в выборе) по принципу умножения $4 \cdot 3 = 12$ способами, а пару девочек – $3 \cdot 2 = 6$ (порядок пары учитывается, так как имеется старший и помощник). Тогда всего способов выбора пары учащихся будет равен $12 + 6 = 18$. Поясним задачу. Занумеруем мальчиков цифрами 1, 2, 3, 4, а девочек 5, 6, 7. Тогда имеется всего комбинаций чисел: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43 и 56, 65, 57, 75, 67, 76.

Комбинации, в которых порядок чисел разный, считаются ***различимыми.*** В этой задаче объектом $\boldsymbol{A}$ является пара мальчиков, а объектом $\boldsymbol{B}$ – пара девочек. Эту пару можно выбрать из совокупности из 7 учащихся (4 мальчика и 3 девочки) с помощью принципа сложения $12 + 6 = 18$ способами. В этом примере мы пользовались правилами умножения и сложения.

Правило сложения. Пусть дана совокупность объектов. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами, а объект В можно выбрать из совокупности объектов n способами, то выбрать любой из этих объектов (либо А, либо В) можно m + n способами.

2.3. Перестановки

П р и м е р 1. Пусть у кассы собралось четыре человека. Сколько всего возможностей скомбинировать очередь?

Р е ш е н и е. Имеется 4 человека и 4 позиции у кассы. Занумеруем людей цифрами: 1, 2, 3, 4. Имеется 4 цифры и четыре позиции для цифр. Имеем четыре возможности поставить в первую позицию одну из четырёх чисел. На вторую позицию можно поставить любую из трёх оставшихся цифр, а на третью – любую из двух оставшихся. Для четвёртой позиции останется одна цифра. Поэтому имеем всего 24 комбинаций из 4 цифр

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Определение. Пусть дана совокупность n элементов. Перестановками n элементов называют такие комбинации из n элементов, которые отличаются порядком следования.

Количество перестановок ***n*** элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

П р и м е р 2. В урне имеется 7 пронумерованных цифрами (от 1 до 7) шаров. Опыт состоит в том, что наудачу извлекается все шары. Сколько всех элементарных событий (перестановок) в этом опыте с учетом порядка выбора шаров?

Р е ш е н и е. Всего $\boldsymbol{P_7} = 7!$ перестановок. Например, одна из перестановок состоит из комбинации семи цифр 4365217.

2.4. Размещения

При решении задач комбинаторики или теории вероятностей часто требуется узнать количество способов выбрать m предметов из n предметов всевозможными способами, причем выборки, отличающиеся последовательностью элементов, считаются различными.

Пусть даны три элемента (предмета) ***a, b, c*** и две позиции. Вопрос состоит в том, сколько двухэлементных комбинаций можно составить из трёх элементов с учётом последовательности их следования в позициях. Легко перечислить все возможные комбинации-размещения.

Три элемента ***a, b, c*** можно в двух позициях ***разместить*** шестью способами:

ab, ba, ac, ca, cb, bc.

Всего шесть ***размещений*** двух элементов из трёх. Количество размещений m элементов из n ($m < n$) обозначается через A_n^m .

П р и м е р 1. Пусть у кассы собрались четверо человек. Кассир сказал, что может отпустить только двоих. Сколько существует возможностей скомбинировать очередь по два из четырёх человек?

Р е ш е н и е. Имеется 4 человека и 2 позиции у кассы. Пронумеруем людей цифрами: 1, 2, 3, 4. Итак, имеется 4 цифры и 2 позиции для цифр. Имеем четыре возможности поставить в первую позицию одну из четырёх чисел. На вторую позицию можно поставить любую из трёх оставшихся цифр. Поэтому существует всего 12 комбинаций, которые называются размещениями (в данном случае 4 цифры размещаются в 2 позициях): $4 \cdot 3 = 12$.

Определение. Пусть дана совокупность n элементов. Размещениями из n элементов по m (m < n) называют такие комбинации m элементов, выбранных из n элементов всевозможными способами, которые отличаются и составом элементов, и порядком их следования. Всего количество m

размещений из $\boldsymbol{n}$ элементов вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1) = \prod_{i=n-m+1}^{n} i = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Отметим, что размещения n элементов в n позициях (т.е. когда $n = m$) являются перестановками $A_n^n = P_n$.

П р и м е р 2. Пусть имеется урна с шарами. В урне 7 шаров, занумерованных цифрами от 1 до 7. Опыт состоит в том, что наудачу извлекают два шара. Сколько можно насчитать комбинаций (размещений) в этом опыте с учетом порядка выбора шаров?

Р е ш е н и е. Первым может быть извлечен любой из 7 шаров, и тогда первая цифра размещается в первой позиции и может быть от 1 до 7. Вторым может быть извлечен любой из 6 оставшихся, и цифра размещается во второй позиции, поэтому количество размещений цифр будет равно 7 × 6 = 42. Это число получается при применении формулы для размещений

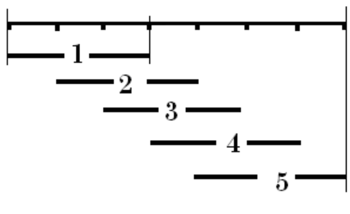
$$\boldsymbol{A}_7^2 = 7 \cdot 6 = 42.$$

Рассмотренная задача эквивалентна следующей: сколько двухзначных чисел можно записать цифрами от 1 до 7.

П р и м е р 3. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 3 девочки и 4 мальчика. Сколько существует всего вариантов рассадить учеников, и сколько из них таких, что девочки сидят рядом?

Р е ш е н и е. Воспользуемся принципом умножения. Для того чтобы рассадить 7 учеников на 7 мест существует 7! = 5040 способов.

Количество тех способов, когда девочки сидят рядом имеется 5 способов, что видно из рисунка



и после каждого такого 1 из 5 выборов, можно усадить девочек на 3 места разными способами 3! = 6, а мальчиков на 4 места разными 4! = 24 способами. Следовательно, существует всего 5 × 3! × 4! = 720 способов.

2.5. Сочетания

При решении задач комбинаторики или теории вероятностей часто требуется узнать количество способов выбора ***m*** предметов из ***n*** предметов всевозможными способами, причем учитываются только те выборки (комбинации), которые отличаются составом элементов, а выборки, отличающиеся только порядком следования, но имеющие одни и те же элементы, разными не считаются.

П р и м е р 1. Пусть даны три элемента (предмета) ***a, b, c*** и две позиции. Вопрос состоит в том, сколько можно составить комбинаций по два из трёх элементов без учёта последовательности их следования.

Р е ш е н и е. Легко перечислить все возможные ***сочетания ab ≡ ba, ac ≡ ca, cb ≡ bc.*** Всего три сочетания.

П р и м е р 2. Встретились 5 друзей и все обменялись рукопожатием. Сколько произошло рукопожатий?

Р е ш е н и е. Первый способ решения. Можно рассуждать так. Пронумеруем всех друзей цифрами от 1 до 5. Тогда количество размещений по 2 из 5 будет равно $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$, но для подсчёта рукопожатий нет необходимости различать последовательности цифр, т.е. комбинации, отличающиеся только различной последовательностью цифр будут тождественны, например, 12 ≡ 21 – рукопожатие между первым и вторым есть в то же время и рукопожатие между вторым и первым, 13 ≡ 31, 14 ≡ 41 и т. д. Поэтому число рукопожатий будет в два раза меньше, чем количества размещений

$$k = \frac{A_5^2}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Второй способ решения. Число рукопожатий равно сочетанию из пяти по два

$$k = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Определение. Пусть дана совокупность n элементов. Сочетаниями из n элементов по m (m < n) называются такие комбинации m элементов, выбираемых из совокупности n, всевозможными способами, которые отличаются только составом элементов, а порядок их следования не учитывается.

Количество сочетаний из ***n*** по ***m*** вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Сопоставляя эту формулу с формулой для размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ можно видеть, что сочетания и размещения связаны соотношением

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Количество сочетаний в m! раз меньше количества размещений.

П р и м е р 3. В чемпионате участвовало 7 шахматистов. Каждый игрок сыграл с другим по одному разу. Сколько всего партий в шахматы было сыграно?

Р е ш е н и е. Каждый из 7 игроков сыграл с 6 остальными, т.е. 7 · 6 = 42, но в таком подсчёте каждая партия посчитана два раза, поэтому было сыграно всего 42 : 2 =21 партия.

Формула для сочетаний из 7 по 2 дает тот же результат

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21.$$

П р и м е р 4. Пусть имеется урна с шарами. В урне 7 шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 7. Опыт состоит в том, что наудачу извлекается два шара: а) Сколько в этом опыте существует комбинаций без учета порядка выбора шаров (т.е. сочетаний)? б). Сколько всех комбинаций с учетом порядка выбора шаров (размещений)?

Р е ш е н и е: а) Количество сочетаний из 7 по 2 равно $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$. б) Количество размещений из 7 по 2 равно $A_7^2 = 42$.

П р и м е р 5. Бросаются два игральных кубика. а) Сколько разных двухзначных чисел может выпасть? б) Сколько среди всех исходов имеется двухзначных чисел, если цифры повторяться не могут? в) Сколько различных сочетаний цифр может выпасть на двух кубиках, т.е. без учета порядка следования цифр?

Р е ш е н и е: а) Согласно правилу умножения количество вариантов $k = 6^2$; б) Среди всех 36 исходов имеется из 6 по 2 размещений $m = A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$, т.е. исключаются 6 исходов 11, 22, 33, 44, 55, 66. в) Если порядок цифр не учитывать в комбинациях, то количество сочетаний равно $n = C_6^2 = 15$, в 2! раза меньше чем размещений.

П р и м е р 6. Решить предыдущий пример 5 с тремя кубиками. Найти: а) Общее количество исходов; б) Количество исходов, в которых нет повторяющихся цифр (ни двух, ни трёх); в) Количество сочетаний трёх цифр на верхней грани кубиков (очевидно, по условию задачи, цифры повторяться не могут).

Р е ш е н и е: а) $k = 6^3 = 216$; б) $m = A_6^3 = 120$; в) $n = C_6^3 = 20$, в 3! = 6 раз меньше, чем размещений.

2.6. Основная задача комбинаторики

П р и м е р 1. В урне имеется три красных шара К1, К2, К3 и два синих С1, С2. Вынимается несколько шаров разных цветов.

а) Сколько можно создать комбинаций из двух шаров разного цвета? б) Сколько комбинаций образуют два красных и один синий цвет? в) Сколько комбинаций составят два красных и два синих цвета? г) Сколько комбинаций при трёх красных и одном синем цвете?

Используем принцип умножения.

Р е ш е н и е: а) $N = C_3^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$;

К1С1, К1С2, К2С1, К2С2, К3С1, К3С2;

б) $N = C_3^2 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$;

К1К2С1, К1К2С2, К2К3С1, К2К3С2, К2К3С1, К2К3С2;

в) $\boldsymbol{N} = C_3^2 \cdot C_2^2 = 3 \cdot 1 = 3$;

К1К2С1С2, К1К3С1С2, К2К3С1С2;

г) $\boldsymbol{N} = C_3^3 \cdot C_2^1 = 1 \cdot 2 = 2$.

К1К2К3С1, К1К2К3С2.

В следующем примере взяты монеты. Однако в других задачах будут присутствовать другие объекты: шары разного цвета, детали годные и бракованные, ученики девочки и мальчики и т.п. Суть всех задач одна: состоит в том, что имеется множество объектов, отличающихся каким-то **признаком** (цвет, дефект, годность и т.д.), и необходимо сделать какую-то выборку указанного числового свойства.

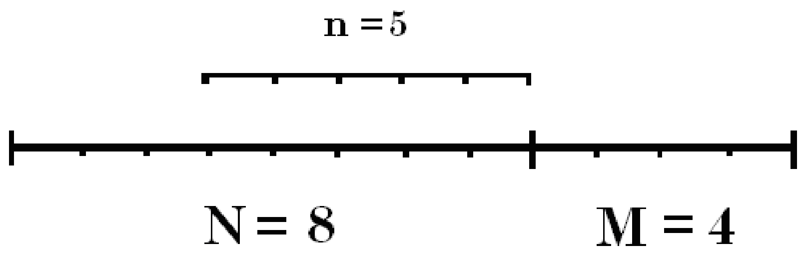
П р и м е р 2. В ящике лежат 12 монет, причем 4 из них фальшивые, остальные настоящие. Берут наугад 5 монет.

1. Сколько есть способов, для того чтобы вынуть 5 монет из 12?

Р е ш е н и е. Общее количество способов, которыми можно извлечь 5 монет из 12, подсчитывается с помощью формулы для сочетаний

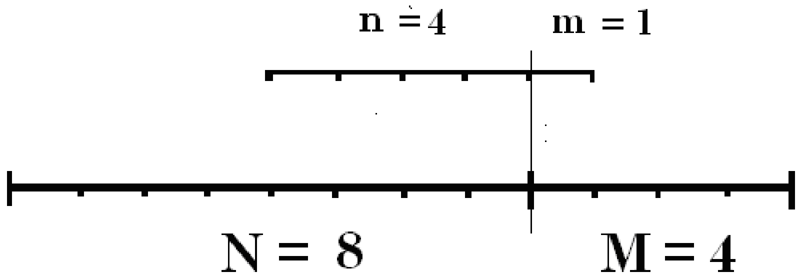
$$k = C_{12}^5 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792.$$

2. Каким количеством способов можно вынуть 5 монет из 12 так, чтобы среди отобранных не оказалось ни одной фальшивой?



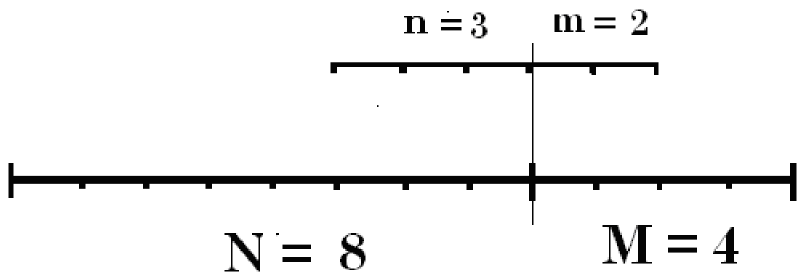
Р е ш е н и е. Среди 12 монет настоящих 8. Выбрать 5 настоящих монет из 8 настоящих есть всего способов $k = C_8^5 = 56$.

3. Каким количеством способов можно вынуть пять монет из 12 так, чтобы среди отобранных оказалась одна фальшивая?



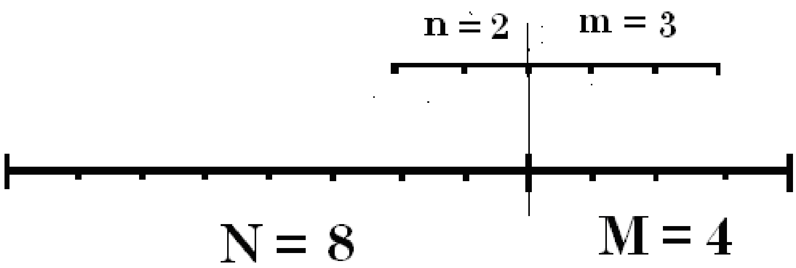
Р е ш е н и е. Для подсчета применим правило умножения. Количество способов, для того чтобы вынуть 1 фальшивую монету из 4 фальшивых, равно 4. Количество способов вынуть 4 нефальшивые монеты из 8 настоящих равно $C_8^4 = 70$. Перемножим результаты и получим $k = C_4^1 C_8^4 = 4 \cdot 70 = 280$.

4. Сколько существует способов для того, чтобы вынуть пять монет из 12 так, чтобы среди отобранных оказались две фальшивые?



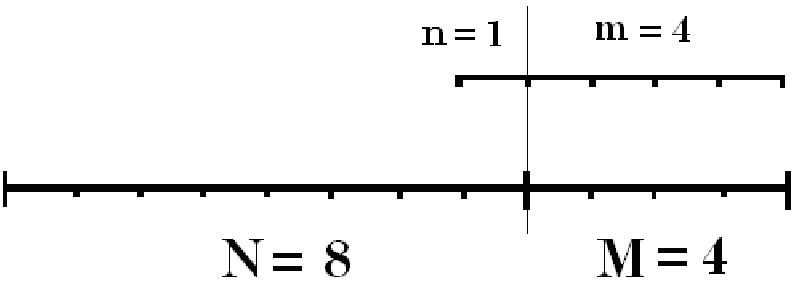
Р е ш е н и е. Для того чтобы вынуть 2 фальшивые монеты из 4 есть 6 способов (первая – вторая, первая – третья, первая – четвертая, вторая – третья, вторая – четвертая, третья – четвертая), умножаем их на количество способов, которыми можно вынуть 3 настоящие монеты из 8 настоящих монет, и получим $k = C_4^2 C_8^3 = 6 \cdot 56 = 336$.

5. Каким количеством способов можно вынуть 5 монет из 12 так, чтобы среди отобранных монет оказались 3 фальшивые?



Р е ш е н и е. Количество способов, которыми можно вынуть 3 фальшивые монеты из 4 имеется 4 способа, и умножаем их на то количество способов, которыми можно вынуть 2 настоящие монеты из 8 настоящих: $k = C_4^3 C_8^2 = 4 \cdot 28 = 112$.

6. Сколько существует способов для того, чтобы вынуть 5 монет из 12 так, чтобы среди отобранных оказались 4 фальшивые?



Р е ш е н и е. Количество способов, которыми можно вынуть 4 фальшивые монеты из 4 фальшивых, есть только 1, умножаем на то количество способов, которыми можно вынуть 1 настоящую монету из 8 настоящих, и получим $k = C_4^4 C_8^1 = 1 \cdot 8 = 8$.

7. Сколькими способами можно вынуть 5 монет из 12

так, чтобы среди отобранных все пять оказались фальшивыми?

Р е ш е н и е. Вынуть 5 монет из 12 так, чтобы все они оказались фальшивыми, – невозможное событие, так как в наборе всего 4 фальшивые монеты, поэтому $k = 0$.

8. Надо вынуть 5 монет из 12 так, чтобы среди отобранных оказалась **хотя бы** одна фальшивая?

Р е ш е н и е. Первый способ. Для подсчета количества комбинаций нужно сложить результаты случаев 2, 3, 4, 5, тогда $k = 280 + 336 + 112 + 8 = 736$.

Второй способ. Можно воспользоваться понятием противоположного события.

События ***A*** = {*в пяти отобранных монетах есть хотя бы одна фальшивая*} и событие ***B*** = {*в пяти монетах нет ни одной фальшивой*} противоположны ***A* + *B* = Ω.** Количество сочетаний для события ***A*** и ***B*** в сумме должны давать общее количество способов **Ω** вынуть пять монет из 12. Воспользуемся результатами пунктов 1 и 2 $k = C_{12}^5 - C_8^5 = 756 - 56 = 736$. И первый и второй способ дают результат $k = 736$.

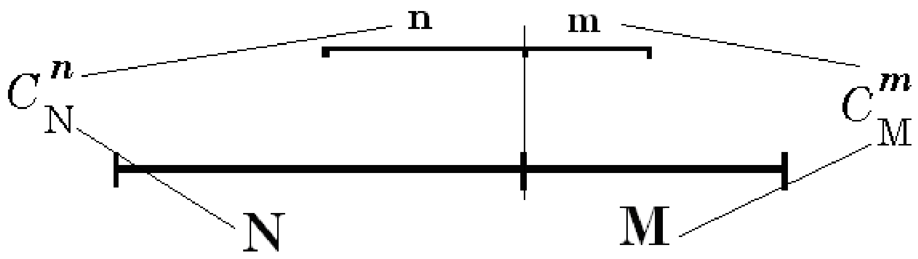
Идею решения только что рассмотренного примера часто используют для составления разных задач на вычисление вероятностей событий: с шарами, деталями, людьми и т.д. (см. задачи 3.2, 6.2)

Поэтому запишем общую схему решения таких задач, назвав её основной задачей комбинаторики.

Пусть имеется два множества элементов, состоящее из **N** и **M** штук в каждом множестве. Из первого множества выбирается ***n*** элементов, из второго ***m***. Сколько всего существует способов (сочетаний) сделать выборку без учета последовательности появления элементов?

Обратим внимание, что задачу можно сформулировать и так. Имеется множество, состоящее из ***K*** элементов. В этом множестве имеются два вида элементов: первого вида в количестве **N**, второго – в количестве **M** , т.е

K = N + M. Сколько всего существует способов сделать выборку объема ***k*** из множества **K** так, чтобы ***n*** элементов оказалось первого вида, а ***m*** элементов второго вида ($\boldsymbol{k = n + m}$) без учета последовательности появления элементов.



$$\boxed{k = C_N^n C_M^m}$$

Р е ш е н и е. Решение даётся общей формулой

$k = C_N^n C_M^m$.

Частными вариантами задачи являются те случаи, когда $\boldsymbol{n = 0}$ (или $\boldsymbol{m} = 0$). Тогда количество выборок подсчитывается по формулам

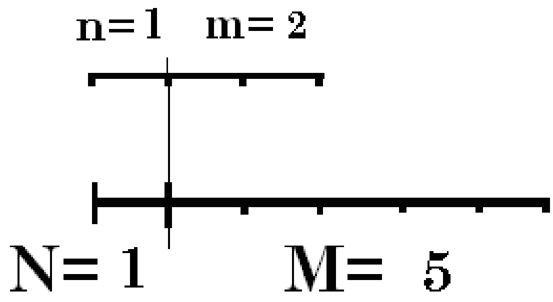
$k = C_N^0 C_M^m = C_M^m$; (или $k = C_N^n C_M^0 = C_N^n$).

Ещё частным случаем является вариант, например $n = 1$ (или $m = 1$)

$k = C_N^1 C_M^m = N C_M^m$; (или $k = C_N^n C_M^1 = M C_N^n$).

П р и м е р. Бросают три игральных кубика. Сколько таких исходов, что на одной грани выпадет 6, а на двух других выпадут числа, не совпадающие между собой и не равные шести.

Р е ш е н и е. В результате опыта выпадает трёхзначное число, следовательно $n + m = 3$. Трёхзначное число записывается цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, причем одна из них 6. Следовательно можем изобразить схему, в которой $n = N = 1$, M = 5, N + M = 6.



N = 1, M = 5, n = 1, m = 2. $k = C_1^1 C_5^2 = 10$.

2.7. Краткий итог

Правило умножения – основной принцип комбинаторики, часто употребляемое при решении задач. С помощью принципа умножения можно подсчитать количество способов выбора пары объектов **(A, B)** из некоторого множества объектов. С его помощью выводятся формулы для количества перестановок P_n, размещений A_n^m, сочетаний C_n^m.

Принцип сложения также важен, но менее употребителен. С помощью принципа сложения подсчитывается количество способов выбора либо объекта **A**, либо объекта **B** из некоторого множества объектов.

Количество способов сделать выборку объёма $k = \boldsymbol{n + m}$ из двух множества элементов состоящее из **N** и **M** штук **K = N + M** элементов, отличающихся каким-то признаком, так чтобы n элементов оказалось первого вида, а m элементов второго вида и без учета последовательности появления элементов даётся формулой, получаемой с помощью принципа умножения

$$k = C_N^n C_M^m.$$

Объемы понятий «комбинации» (соединения), «размещения», «перестановки», «сочетания» связаны схемой на рис.14.

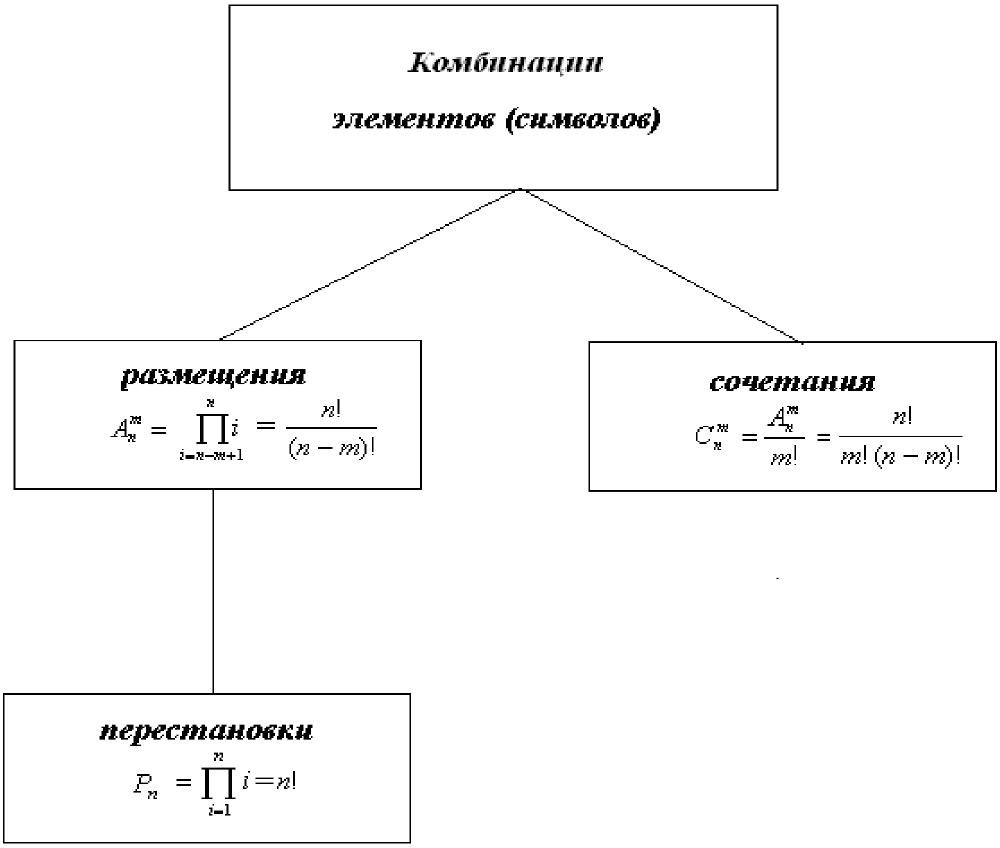


Рис. 14. Формулы для расчёта комбинаций из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$. Комбинации элементов могут быть двух видов: размещения или сочетания. Если $\boldsymbol{m = n}$, то размещения будут перестановками. Количество сочетаний в $\boldsymbol{m}!$ раз меньше, чем количество размещений

3. КЛАССИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. Классическое определение вероятности

Определение вероятности было дано в 1.9, но сформулируем его ещё раз, обращая внимание на условия проведения эксперимента.

Чтобы вычислить вероятность с помощью классической формулы, эксперимент должен проводиться при наличии определённых условий $\boldsymbol{S}$. Условия должны быть таковы, чтобы обеспечить **несовместность** элементарных исходов, которые образуют **полную группу и равновозможны**. Если условия проведения испытания S обеспечивают нужные нам 3 свойства, то можно воспользоваться классической формулой $P = m/n$ для вычисления вероятности наступления события.

Пусть эксперимент S обеспечивает эти три условия.

Определение. Вероятностью появления события A в эксперименте S называется дробное число P, равное отношению m/n, где m – количество событий, благоприятствующих появлению события A в эксперименте S, n – общее количество равновозможных, несовместных и образующих полную группу событий в эксперименте S .

Или короче.

Определение. Вероятностью появления события A в эксперименте S называется дробное число P, равное отношению m/n, где m – количество случаев, благоприятствующих появлению события A в эксперименте S, n – общее количество случаев в эксперименте S. Вероятность невозможного события равна нулю $P(\varnothing) = 0/n = 0$. Вероятность достоверного события равна единице $P(\Omega) = n/n = 1$.

3.2. Основная задача теории вероятности

З а д а ч а 1. В ящике лежат 12 монет, причем 8 настоящих и 4 фальшивые. Берут наугад 5 монет.

В примере 2 пункта 2.6 мы находили различные сочетания и теперь воспользуемся полученными результатами для нахождения вероятности появления события. Обратим ещё раз внимание, что в задаче взяты монеты. Однако в других задачах будут присутствовать другие объекты: шары разного цвета, детали, годные и бракованные, ученики, девочки и мальчики, и т.п. Суть состоит в том, что имеется множество объектов, отличающихся каким-то признаком, и необходимо сделать какую-то выборку, заданного свойства и вычислить вероятность появления такой выборки.

1. Мы определили в 2.6, что общее число случаев вынуть пять монет из 12 равно числу сочетаний из 12 по 5

$$n = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792 .$$

2. Вычислить вероятность события

A = {среди 5 отобранных монет нет ни одной фальшивой}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $m = C_8^5 = 56$. Вероятность равна ***P***(***A***) = 56/792 = =7/99 .

3. Вычислить вероятность события

A = {среди 5 отобранных монет оказалась 1 фальшивая}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $\boldsymbol{m} = C_4^1 C_8^4 = 4 \cdot 70 = 280$. Вероятность равна ***P***(***A***) = =280/792 = 35/99.

4. Вычислить вероятность события

B = {среди 5 отобранных монет оказались 2 фальшивые}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $k = C_4^2 C_8^3 = 6 \cdot 56 = 336$ и вероятность равна ***P***(***A***) = =336/792 = 42/99 =14/33.

5. Вычислить вероятность события

C = {среди 5 отобранных монет оказались 3 фальшивые}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $k = C_4^3 C_8^2 = 4 \cdot 28 = 112$. Вероятность равна ***P***(***A***) = =112 / 792 = 14/99 **.**

6. Вычислить вероятность события

D = {среди 5 отобранных монет оказались 4 фальшивых}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $k = C_4^4 C_8^1 = 1 \cdot 8 = 8$. Вероятность равна $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ = 8/ 792 = 1/99.

7. Вычислить вероятность события

Е = {среди **5** отобранных монет – пять фальшивых}.

Р е ш е н и е. Количество благоприятствующих исходов равно $k = 0$. Вероятность равна $P(A)$ = 0/792 = 0**.** Это невозможное событие.

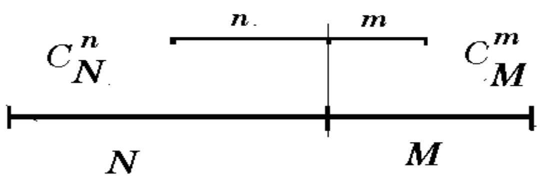
8. Какова вероятность вынуть 5 монет из 12 так, чтобы среди отобранных оказалась хотя бы одна фальшивая?

Количество благоприятствующих исходов равно $k = 280 + 336 + 112 + 8 = 736$. Вероятность равна $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ = 736/792 = 0,929**.** Это высоко вероятное событие. Задачу можно решить, используя понятие противоположных событий**.** Количество способов вынуть 5 монет так, чтобы в выборке не было ни одной фальшивой равно k = 56

$$P(A) = 1 - \frac{56}{792} = \frac{736}{792} = 0{,}929.$$

Этот пример – частный случай следующей основной задачи теории вероятностей.

Имеется множество, состоящее из $\boldsymbol{K}$ элементов. В этом множестве имеются два вида элементов: первого вида в количестве $\boldsymbol{N}$, второго – в количестве $\boldsymbol{M}$. Какова вероятность сделать выборку, объема $\boldsymbol{k}$ из множества $\boldsymbol{K}$ так чтобы $\boldsymbol{n}$ элементов оказалось первого вида, а $\boldsymbol{m}$ элементов второго вида ($k = n + m$) без учета последовательности появления элементов.



$$P(A) = \frac{C^n\, C^m}{C_{N+M}^{n+m}}$$

Р е ш е н и е. Решение даётся общей формулой

$$P(A)=\frac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}=\frac{C_N^n C_M^m}{C_K^k}$$

Частными вариантами задачи являются случаи:

а) $\boldsymbol{n}$ **=** 0 (или $\boldsymbol{m}$ = 0) равно нулю

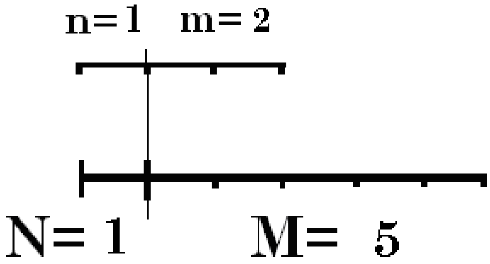
$$P(A)=\frac{C_N^0 C_M^m}{C_{N+M}^m}=\frac{C_M^m}{C_{N+M}^m}, \text{ или } \left(P(A)=\frac{C_N^n C_M^0}{C_{N+M}^n}=\frac{C_N^n}{C_{N+M}^n}\right).$$

б) $\boldsymbol{n}$ **=** 1 (или $\boldsymbol{m}$ = 1) равно единице

$$P(A)=\frac{C_N^1 C_M^m}{C_{N+M}^{m+1}}=\frac{NC_M^m}{C_{N+M}^{m+1}}, \text{ или } \left(P(A)=\frac{C_N^n C_M^1}{C_{N+M}^{n+1}}=\frac{MC_N^n}{C_{N+M}^{n+1}}\right).$$

П р и м е р. Бросают три игральных кубика. Вычислить вероятность события: на одной грани выпадет 6, а на двух других выпадут числа, не совпадающие между собой и не равные шести.

Р е ш е н и е. В результате опыта впадает трёхзначное число, следовательно $n + m = 3$. Трёхзначное число записывается цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, причем одна из них 6. Следовательно можем изобразить схему, в которой $n = N = 1$. N + M = 6, M = 5. Общее количество исходов равно $K=C_6^3=20$.



Искомая вероятность равна $P=\frac{C_1^1 C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$.

3.3. Статистическая вероятность

Классическое определение вероятности $\boldsymbol{P}$ события $\boldsymbol{A}$ в эксперименте $\boldsymbol{S}$ предполагает, что число элементарных исходов в эксперименте $\boldsymbol{S}$ конечно. Но в практике встречаются задачи, когда трудно говорить о том, что результат эксперимента есть совокупность элементарных и равновозможных исходов.

Поэтому, наряду с классическим определением существует статистическое определение вероятности. Для этого вводится понятие относительной частоты.

Определение. Относительная частота W(A) события A есть дробное число экспериментов m, в котором появилось событие A в эксперименте S, к общему числу проведенных экспериментов n

$$W\,(A) = m/n.$$

Главное отличие между вероятностью P и относительной частотой W состоит в том, что вероятность вычисляют до проведения экспериментов S, а относительную частоту – после проведения экспериментов S .

Для вычисления вероятности не требуется, чтобы эксперименты проводились фактически, а для определения относительной частоты нужно действительно провести эксперименты.

П р и м е р. Бросается монета и подсчитывается число появление герба. Результаты показаны в таблице

Число бросаний n	Число появлений орла m	Относительная частота $W = \frac{m}{n}$	Относительная погрешность δ , %
4040	2048	0,5069	1.4
12000	6019	0,5016	0.32
24000	12012	0,5005	0.10

Из приведенной таблицы видно, что относительная частота принимает значения близкие к вероятности 0,5, причем относительная погрешность $\delta = (W–P)/P \cdot 100\%$ тем меньше, чем больше количество испытаний n.

Определение. Свойство уменьшения относительной погрешности δ относительной частоты W называется свойством устойчивости.

Искусный стрелок поражает далёкую цель с большой вероятностью, а новичок, скорее всего, промахнётся. Степень искусности стрелка можно оценить в долях единицы по формуле

$$\boldsymbol{W = m/n},$$

где $\boldsymbol{W}$ – относительная частота попадания в цель, $\boldsymbol{n}$ – общее число произведённых выстрелов, $\boldsymbol{m}$ – число попаданий.

Определение. Статистической вероятностью события А называется дробное число, возле которого колеблется относительная частота при достаточно большом количестве экспериментов.

Н а п р и м е р. Пусть из 5 выстрелов отмечено 2 попадания, тогда $\mathbf{W} = 2/5 = 0{,}4$; из 10 – 6, тогда $\boldsymbol{W} = 0{,}6$; из 100 – 72 и $\boldsymbol{W} = 0{,}72$; из 1000 – 724 , $\boldsymbol{W} = 0{,}724$.

Свойство устойчивости позволяет опытным путём приближённо оценивать вероятность событий.

Вероятность поражения мишени стрелком приблизительно с точностью до сотых равно 0,72.

4. КЛАССИЧЕСКОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическое определение вероятности $\boldsymbol{P}$ события $\boldsymbol{A}$ в эксперименте $\boldsymbol{S}$ предполагает, что число элементарных исходов в эксперименте $\boldsymbol{S}$ конечно. Но на практике бывают случаи, когда количество элементарных исходов в эксперименте ***S несчётно и равновероятно***. Преодолеть этот недостаток классического определения можно с помощью аксиоматического определения вероятности или с помощью геометрической вероятности.

П р и м е р 1. Пусть отрезок $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ на числовой оси содержит меньший отрезок $\boldsymbol{l} = [a, b]$. Эксперимент состоит в том, что на отрезок [***A*, *B***] ставится произвольно точка ***M*** с координатой x. Предполагается выполнение условия ***S***: точка может попасть произвольно, равновероятно в любую часть отрезка [***A*, *B***]. Исходом эксперимента будет действительное число $\xi = x - A$, равное длине отрезка $[A, x]$. Найти вероятность того что точка попадёт на отрезок l.

Р е ш е н и е. Ясно, что в этой задаче бесконечно много исходов. Случайная величина ξ может принять несчётное количество значений заключённных на отрезке ($\xi \in$ [0, ***B–A***]) и применить классическое определение вероятности невозможно. В задаче предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок ***L*** не зависит от расположения отрезка ***l*** на отрезке [***A*, *B***]. Поскольку попадание точки в любую часть отрезка предполагается равновероятным (распределение точек по отрезку ***L*** равномерное), то разумно предположить, что вероятность равна отношению

$$P = \frac{\text{Длина отрезка}\, l}{\text{Длина отрезка}\, L}.$$

Если ***l*** $= L$, то ***P*** $= 1$, и событие, состоящее в том, что точка попадёт на отрезок l, есть достоверное событие. Если $l = 0$, то $P = 0$, и событие невозможное.

Формула есть определение геометрической вероятности, и оно является частным случаем общего определения геометрической вероятности.

Обозначим меру (длину, площадь, объём) области через mes (от англ. *measure* – мера). Областью, в которую попадает точка, может быть не только отрезок, но и часть плоскости, часть объёма.

Определение. Пусть область G содержит в себе область g. Если в область G бросается наугад точка и её попадание в любую точку области G несчётно и равновозможно, то вероятность попадания точки в область g равна

$$P = \frac{mes\ (\boldsymbol{g})}{mes\ (\boldsymbol{G})}.$$

П р и м е р 2. Внутрь круга радиуса $\boldsymbol{R}$ наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Р е ш е н и е. Площадь квадрата равна $2\boldsymbol{R}^2$, а площадь круга $\pi\boldsymbol{R}^2$. Следовательно искомая вероятность равна $P = 2/\pi$.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, которые присущи классическому и аксиоматическому определениям.

5. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

5.1. Множество всех возможных исходов

В теории вероятностей часто употребляется термин ***пространство*** – событий, элементарных исходов. Пространство – это синоним слова ***совокупность*** **(*множество*)** всех возможных ***событий*** эксперимента. Пространство часто обозначают греческой буквой $\boldsymbol{\Omega}$.

П р и м е р 1. Пусть проводят **эксперимент**, который состоит в подбрасывании монеты. В данном эксперименте имеется два исхода (**О**) или (**Р**). Элементарные исходы часто обозначают греческой буквой $\boldsymbol{\omega}$ с индексами. У нас есть два элементарных исхода $\boldsymbol{\omega_1 = \text{О}}$, $\boldsymbol{\omega_2 = \text{Р}}$. Пространство элементарных исходов $\boldsymbol{\Omega}$ есть совокупность двух элементарных исходов. В данном случае в эксперименте есть два элементарных исхода $\boldsymbol{\omega_1 = \text{О}}$, $\boldsymbol{\omega_2 = \text{Р}}$, поэтому можно записать так $\Omega = \{\textbf{О, Р}\}$, или так $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}}$.

П р и м е р 2. Если бросаем 2 монеты одновременно, то есть четыре элементарных исхода $\boldsymbol{\omega_1 = \text{ОО}}$, $\boldsymbol{\omega_2 = \text{ОР}}$, $\boldsymbol{\omega_3 = \text{РО}}$, $\boldsymbol{\omega_4 = \text{РР}}$, поэтому можно записать следующим образом:

$\Omega = \{\text{ОО, ОР, РО, РР}\}$ или так $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Итак, элементарными исходами эксперимента называются все результаты опыта, которые далее не рационально раскладывать на более простые исходы. Пространством событий $\mathbf{\Omega}$ есть все множество элементарных исходов. Составное событие $\boldsymbol{A}$ есть подмножество множества элементарных событий $\boldsymbol{A} \subset \mathbf{\Omega}$. Например, $\boldsymbol{A} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, или $\boldsymbol{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, или $\boldsymbol{A} = \{\omega_2, \omega_4\}$ и т.п.

5.2. Мера событий (множеств)

Событие понимается как совокупность множества точек (элементарных исходов). Напомним, что применительно к множествам (событиям) вместо знаков сложить + умножить ($\cdot$ или $\times$) применяются в аксиоматике знаки **объединения** $\bigcup$ и **пересечения** $\bigcap$. Множество **дополнение** $\boldsymbol{D}$ к множеству $\boldsymbol{A}$ находится с помощью формулы $\boldsymbol{D} = \mathbf{\Omega} \backslash \boldsymbol{A}$, где знак \ означает вычитание.

Понятие меры (mes) множества $\boldsymbol{A}$ является естественным обобщением понятий: длины фигуры, приращения неубывающей функции, интеграла от неотрицательной функции и т.п. Это понятие возникло в теории функции вещественной переменной и оттуда перешло в теорию вероятностей, функциональный анализ и другие области математики.

Ограничимся здесь только нестрогим определением.

Пусть дано множество $\boldsymbol{X}$. Например, множество элементарных событий, числовая прямая, отрезок, плоскость, трехмерное пространство.

Мера (mes) есть функция, которая по определённому правилу сопоставляет множеству (или событию) неотрицательное число (называемое мерой этого множества). Мера (функция, правило) удовлетворяет аксиомам: 1) мера пустого множества равна нулю; 2) мера объединения непересекающихся множеств должна равняться сумме их мер.

Например:

а) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – множества элементарных исходов при подсчете вероятности, то mes ($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{m}$ – натуральное число (количество исходов). Мера конечного множества есть натуральное число;

б) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – множества элементарных исходов, в проделанных экспериментах, при подсчёте относительной частоты, то mes($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{m}$ – натуральное число (количество экспериментов, в котором появилось событие $\boldsymbol{A}$);

в) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – отрезки при подсчёте геометрической вероятности, то mes ($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{l}$ – вещественное неотрицательное число (длина отрезка);

г) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – плоские фигуры при подсчёте геометрической вероятности, то mes ($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{S}$ – вещественное неотрицательное число (площадь фигуры).

д) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – объёмные фигуры при подсчёте геометрической вероятности, то mes ($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{V}$ – вещественное неотрицательное число (объём фигуры);

Для множества элементарных событий $\boldsymbol{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n\}$ в эксперименте можно мыслить систему $\mathfrak{I}$ всевозможных событий $\boldsymbol{A_i}$, получаемых из элементарных с помощью знаков **объединения** $\bigcup$, или **пересечения** $\bigcap$, или **разности** $\setminus$.

Для любого элементарного события $\omega_i \in \boldsymbol{\Omega}$ и любого события $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\Omega}$ в эксперименте задаётся мера mes($\boldsymbol{A}$).

П р и м е р 1. Если бросаем 2 монеты одновременно, то имеется четыре возможности, которые и называются элементарными исходами этого эксперимента. В данном случае есть четыре элементарных исхода $\boldsymbol{\Omega}$ = {**ОО, ОР, РО, РР**} $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Каждому исходу ω_i ставится мера, равная 1, т.е. mes (ω_i) = 1, тогда любое составное событие $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$ выразится натуральными числом.

Если $\boldsymbol{A}$ = { *выпадение хотя бы одного орла* } = $=\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_1 \bigcup \omega_2 \bigcup \omega_3$, то mes($\boldsymbol{A}$) = 3.

Если $\boldsymbol{A}$ = {*выпадение хотя бы одного орла или выпаде-*

ние двух решек} = $\boldsymbol{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \omega_1 \bigcup \omega 2 \bigcup \omega 3 \bigcup \omega 4 = \Omega}$, то $\mathrm{mes}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{4}$.

Если $A = (\omega_1 \bigcap \omega_2) \bigcup (\omega_3 \bigcap \omega_4) = \varnothing$, т о $\mathrm{mes}(A) = 0$.

Если $A = (\omega_1 \bigcup \omega_2) \bigcup (\omega_3 \bigcap \omega_4) = OO + OP$, то $\mathrm{mes}(A) = 2$.

При определении геометрической вероятности за меру события $\mathrm{mes}(\boldsymbol{A})$ брались: либо длина, либо площадь, либо объём геометрической области, заданной в эксперименте.

П р и м е р 2. Событие $\boldsymbol{B}$ является частным случаем события $\boldsymbol{A}$, ***т.е.*** $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$. Чему равно сумма (объединение) и произведение (пересечение) этих событий?

Р е ш е н и е. Пользуясь определением суммы и произведения двух событий, получаем

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$

П р и м е р 3. Когда пересечение двух событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равно событию $\boldsymbol{A}$, т.е. $\boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ **?**

Р е ш е н и е. Если $\boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.

П р и м е р 4. На плоскости имеется два круга – 1 и 2**.** Пусть на плоскость бросают точку, которая может попасть в любую точку плоскости. И пусть события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ состоят в том, что эта точка попадает соответственно в круг 1 и в круг 2.

Какой смысл имеют следующие события

1) $\Omega \backslash A$, 2)$\Omega \backslash B$, 3) $\Omega \backslash (A \bigcup B)$,

4) $A \bigcup B$, 5) $A \bigcap B$, 6) $A \bigcap B = \varnothing$?

Р е ш е н и е. 1) Точка не попала в круг 1. 2) Точка не попала в круг 2. 3) Точка не попала в круги 1 и 2. 4) Точка попала либо в круг 1 либо в круг 2, либо в общую их часть. 5) Точка попала в общую часть кругов 1 и 2. 6) Событие невозможно (пусто). Точка не может попасть в общую часть кругов. Следовательно, круги не пересекаются, общей части у кругов нет.

5.3. Вероятностная функция

Введя меру события, можно ввести в рассмотрение и вероятностную функцию на системе $\mathfrak{I}$ событий пространства $\boldsymbol{\Omega}$ эксперимента.

Определение. Вероятностной функцией P(A) на системе событий $\mathfrak{I}$ пространства Ω некоторого эксперимента называется функция, определяемая

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(\boldsymbol{A})}{\mathrm{mes}(\Omega)}.$$

Эта функция обобщает введенные ранее определения вероятностей: классической, статистической, геометрической.

Например, если требуется найти вероятность классическим способом, то

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(\boldsymbol{A})}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$

Эта функция $\boldsymbol{P}$ обладает следующими 8 свойствами:

1. Свойство нормированности:

Если $\boldsymbol{\Omega}$ есть пространство событий**,** то $P(\boldsymbol{\Omega}) = 1$

2. Свойство неотрицательности:

Если событие $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$, то $P(\boldsymbol{A}) \geq 0$.

3. Значение функции на любом событии не больше единицы:

Если событие $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$, то $P(\boldsymbol{A}) \leq 1$.

(Из свойств 2 и 3 следует: если событие $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$, то $0 \leq P(\boldsymbol{A}) \leq 1$)

4. Свойство аддитивности.

Если $\boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B} = \varnothing$, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}) + P(\boldsymbol{B})$.

5. Значение функции от пустого множества равно нулю.

Если $\varnothing$ – невозможное событие, то $P(\varnothing) = 0$.

6. Сумма значений функции $\boldsymbol{P}$ от противоположных событий равна 1.

Если $\boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega}$, то $P(\boldsymbol{A}) + P(\boldsymbol{B}) = 1$.

7. Если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ (т.е. событие $\boldsymbol{A}$ влечет за собой $\boldsymbol{B}$), то $P(\boldsymbol{A}) \leq P(\boldsymbol{B})$ (в частности справедливо свойство 3).

8. Если события $\bigcup \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{A}_i \bigcap \boldsymbol{A}_j$ (т.е. образуют полную группу несовместных событий), то $\sum P(\boldsymbol{A}_i) = 1$ (в частности справедливо свойство 4).

5.4. Аксиоматическое определение вероятности

Теория вероятностей как математическая дисциплина может и должна быть аксиоматизирована совершенно в том же смысле, как геометрия или алгебра. Это означает, что после того, как даны названия изучаемым **объектам** и даны названия отношениям между ними, сформулированы аксиомы, которым эти отношения должны подчиняться, всё дальнейшее изложение должно основываться исключительно лишь на этих аксиомах, вовсе не опираясь на конкретные свойства, присущие этим **объектам**.

Аксиоматизация теории вероятностей может быть проведена различными способами, как в отношении выбора аксиом, так и объектов или их отношений. Рассмотрим наиболее простой вариант аксиоматизации теории вероятностей.

Пусть рассматриваются следующие **объекты**:

$\boldsymbol{\Omega}$ – множество элементов ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые называются элементарными событиями; $\mathfrak{I}$ – система подмножеств $\boldsymbol{\Omega}$, называемых **случайными событиями** (или просто **событиями**).

На системе подмножеств $\mathfrak{I}$ определена вероятностная функция $P(\boldsymbol{A})$.

Тройка $\{\boldsymbol{\Omega}, \mathfrak{I}, P\}$ математических объектов называется вероятностным пространством и пусть удовлетворяет аксиомам **1 ÷ 5**:

1) $\mathfrak{I}$ содержит невозможное $\varnothing$ и достоверное $\boldsymbol{\Omega}$ события;

2) если имеется конечный (или счётный) набор собы-

тий $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{I}$, то их сумма $\bigcup A_i$, произведение $\bigcap A_i$ и дополнения $\Omega \setminus A_i$ принадлежат $\mathfrak{I}$;

3) если $A \in \mathfrak{I}$, то $P(A) \geq 0$;

4) значение функции от пространства событий равно единице

$$P(\Omega) = 1;$$

5) если A и B не пересекаются, т.е. $A \bigcap B = \varnothing$, то

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$$

Из этих первичных утверждений (**аксиом**), принимаемых без доказательства, следуют все другие свойств вероятностной функции (п.5.3), которые можно доказать, опираясь на **аксиомы**.

5.5. Некоторые примеры

В каждом из следующих примеров задано вероятностное пространство, т.е. тройка $\{\Omega, \mathfrak{I}, P\}$.

П р и м е р 1. Бросают 3 монеты. Найти распределение вероятностей для каждой из двух систем элементарных исходов.

1-я *система*. Система $\mathfrak{I}$ состоит из 8 элементарных исходов со значениями вероятностной функции, заданной в таблице

ω_i	**ООО**	**ООР**	**ОРО**	**РОО**	**ОРР**	**РОР**	**РРО**	**РРР**
$P(\omega_i)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Все исходы равновозможны. В систему $\mathfrak{I}$ входят события: невозможное $\varnothing$ и достоверное Ω. Все аксиомы 1÷5 набора $\{\Omega, \mathfrak{I}, P\}$ выполняются.

2-я *система*. Система $\mathfrak{I}$ состоит из 4 исходов, которые по условию являются элементарными, со значениями вероятностной функции, заданной с помощью таблицы.

	3 «орла»	2 «орла» + 1 «решка»	1 «орёл» + 2 «решки»	3 «решки»
ω_i	**ООО**	**ООР⋃ОРО⋃РОО**	**ОРР ⋃РОР ⋃РРО**	**РРР**
$P(\omega_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

П р и м е р 2. Бросают два игральных кубика. Найти распределение вероятностей для каждой из двух систем элементарных исходов.

1-я *система*. Исходы состоят из всевозможных **пар** чисел, выпавших на верхних гранях. Система состоит из 36 элементарных исходов со значениями вероятностной функции

ω_i	11	12	13	14	…	64	65	66
$P(\omega_i)$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Все исходы равновозможны. Все свойства вероятностной функции выполняются.

2-я *система*. Исходы состоят из **суммы** всевозможных пар чисел, выпавших на обоих верхних гранях. Минимальное значение 2, максимальное 12. Система $\mathfrak{I}$ состоит из 12 исходов со значениями вероятностной функции, заданной таблично.

ω_i	2	3	4	5	…	10	11	12
$P(\omega_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	…	3/36	2/36	1/36

П р и м е р 3. Бросают монету до первого выпадения «Орла» = **О**. Построить пространство состояний.

Р е ш е н и е. В этом примере мы сталкиваемся с пространством событий, содержащим бесконечное (**счётное**)

ω_i	O	PPO	PPPO	PPPPO	PPPPPO	PPPPPPO	…
$P(\omega_i)$	1/2	1/4	3/36	1/8	1/16	1/32	…

количество элементарных исходов **Ω = {O, PO, PPO, PPPO, PPPPO, …} .**

6. ЗАДАЧИ

6.1. Задачи на вычисление вероятности

№ 1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на гранях хотя бы одной из костей появится шестерка.

Р е ш е н и е. На выпавшей грани первой игральной кости может появиться одно очко, два очка,..., шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны и при бросании второй кости. Каждый из исходов бросания первой кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй. Таким образом общее число возможных элементарных исходов испытания равно $6 \times 6 = 36$. Эти исходы образуют полную группу, и в силу симметрии костей равновозможны.

Благоприятствующими интересующему нас событию $\boldsymbol{A}$ = {хотя бы на одной грани появится шестерка и сумма выпавших очков четная} являются следующие пять исходов

1) 6, 2; 2) 6, 4; 3) 6, 6; 4) 2, 6; 5) 4, 6.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов испытания: $P(A)=\frac{5}{36}$.

Ответ: 5/36 .

№2. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: случайно названное двузначное число.

Р е ш е н и е. Мы рассматриваем событие $\boldsymbol{A}$ = { случайно задуманное двузначное число}.

Для этого события общее число возможных элементарных исходов $n = 90$, т.е. количество всех двузначных чисел от 10 до 99. Число возможных исходов, благоприятствующих событию $m = 1$, т.е. только одно двузначное число будет равно задуманному. Итак, по классическому определению вероятности получаем: $P(\boldsymbol{A}) = m/n = 1/90$.

Ответ: 1/90.

№ 3. Указать ошибку «решения» задачи: брошены две игральные кости, найти вероятность того, что сумма очков на костях будет равна **3** (событие ***A***).

«Решение»: возможны два исхода события: сумма выпавших очков равна **3**, сумма выпавших очков не равна **3**. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность $P(\boldsymbol{A}) = m/n = ½$.

Ошибка этого «решения» состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются ***равновозможными***.

Правильное решение: общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число очков, выпавших на одной кости, может сочетаться со всеми числами очков, выпавших на другой). Среди этих исходов событию А может благоприятствовать только два исхода:(2, 1), (1, 2). Следовательно, искомая вероятность Р(А) = $m/n = 2/36 = 1/18$.

Ответ: 1/18.

№ 4. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми и разность – четырём; в) сумма выпавших очков равна пяти и произведение – четырём; г) на кубиках выпадет равное число очков; д) число, выпавшее на первом кубике, больше числа, выпавшего на втором кубике; е)самое вероятное значение суммы выпавших очков.

Р е ш е н и е. Общее число равновозможных исходов равно $6 \times 6 = 36$:

11, 12, 13, 14, 15, 16,
21, 22, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 33, 34, 35, 36,
41, 42, 43, 44, 45, 46,
51, 52, 53, 54, 55, 56,
61, 62, 63, 64, 65, 66

а) среди общего количества исходов событию A благоприятствуют только 6: (16), (61), (25), (52), (34), (43), следовательно искомая вероятность 6/36 = 1/6;

б) среди общего количества исходов событию $\boldsymbol{A}$ благоприятствуют только 6: (2,6), (6,2), (3,5) ,(5,3), (4,4), (4,4), но вследствие того, что разность равна 4, останется только два события: (2,6) и (6,2). Следовательно, искомая вероятность 2/36 = 1/18;

в) среди общего количества исходов событию А благоприятствуют только 2: (1,4), (4,1). Следовательно искомая вероятность 2/36 = 1/18;

г) благоприятствующих исходов всего 6: 11, 22, 33, 44, 55, 66. Следовательно, $P = 1/6$;

д) исходов, благоприятствующих событию 21, 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, всего 15. Следовательно $P = 15/36$;

е) наивероятнейшее значение суммы – 7, так как встречается 6 раз, а других меньше. Например, сумма 6 встречается пять раз, сумма 5 встречается 4 раза, сумма 4 встречается 3 раза, сумма 3 – 2 раза, сумма 2 – 1 раз.

№ 5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые после этого тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: а) три; б) две; в) одну; г) ни одной.

Р е ш е н и е. Общее число равновозможных исходов составляет 1000 (всего столько кубиков):

а) событию $\boldsymbol{A}_3$ благоприятствует 8 исходов (только на углах большого куба у маленьких кубиков окрашены **3** грани), т.е. $P(\boldsymbol{A}) = \frac{8}{1000}$;

б) событию $\boldsymbol{A}_2$ благоприятствует 96 исходов (12 рёбер, на которых расположено по 8 маленьких кубиков с двумя окрашенными гранями $12 \times 8 = 96$), поэтому $P(\boldsymbol{A}) = \frac{96}{1000}$;

в) событию A_1 благоприятствует 384 исхода (64 маленьких кубика имеют одну окрашенную грань на грани большого, так как граней у куба 6, поэтому $6 \times 64 = 384$), следовательно искомая вероятность. $P(A)=\frac{384}{1000}$;

г) событию A_0 благоприятствует 1000 – 384 – 96 – 8 = 512, поэтому $P(A)=\frac{512}{1000}=0{,}512$.

№ 6. В коробке шесть одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Найти вероятность того, что номера извлечённых кубиков появятся в возрастающем порядке.

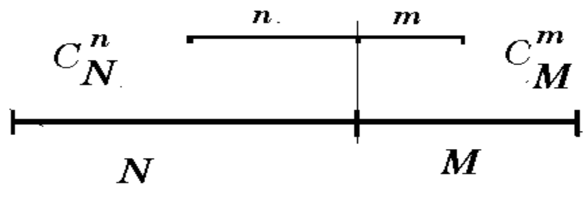
Р е ш е н и е. Так как нам важно, в каком порядке извлекаются кубики, то для подсчёта всех возможных исходов необходимо найти все их перестановки, т. е. n = 6! = =720. Число всевозможных исходов эксперимента – 720.

Число исходов, благоприятствующих событию – 1, (т. е. m = 1). Значит вероятность того, что все кубики извлекутся в нужном порядке равна $P(A) = m/n$ = 1/720

Ответ: 1/720.

6.2. Основная задача теории вероятностей

Имеется множество, состоящее из K элементов. В этом множестве имеются два вида элементов: первого вида в количестве $\boldsymbol{N}$**,** второго – в количестве $\boldsymbol{M}$. Какова вероятность сделать выборку объема $\boldsymbol{k}$ из множества $\boldsymbol{K}$ так, чтобы $\boldsymbol{n}$ элементов оказалось первого вида, а $\boldsymbol{m}$ элементов второго вида ($k = n + m$) без учета последовательности появления элементов.



$$P(A) = \frac{C^n\, C^m}{C_{N+M}^{n+m}}$$

Р е ш е н и е даётся общей формулой

$$P(A)=\frac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}} \quad \text{(см.3.2).} \tag{1}$$

Частными вариантами задачи являются случаи:

а) $n = 0$ (или $m = 0$) равно нулю

$$P(A)=\frac{C_N^0 C_M^m}{C_{N+M}^m}=\frac{C_M^m}{C_{N+M}^m}\ , \text{(или } P(A)=\frac{C_N^n C_M^0}{C_{N+M}^n}=\frac{C_N^n}{C_{N+M}^n}\text{).} \tag{2}$$

б) $n = 1$ (или $m = 1$) равно единице

$$P(A)=\frac{C_N^1 C_M^0}{C_{N+M}^n}=\frac{NC_N^n}{C_{N+M}^n}\ , \text{(или } P(A)=\frac{C_N^n C_M^0}{C_{N+M}^n}=\frac{MC_N^n}{C_{N+M}^n}\text{).} \tag{3}$$

в) ещё более частным случаем может быть задача с формулой

$$P(A)=\frac{1}{C_N^n}. \tag{4}$$

В каждой задаче надо определиться с числами ***N, M, n, m*** (см. 3.2).

№ 1. В малой фирме работают шесть мужчин и четыре женщины. По электронному журналу наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных человек (в выборке) окажутся три женщины.

Р е ш е н и е. $N = 6$, $M = 4$, $n = 4$, $m = 3$. Формула (1)

Общее число равновозможных элементарных исходов испытания равно числу способов отбирания по журналу 7 человек из 10, т.е числу сочетаний C_{10}^7.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: трех из четырех можно отобрать C_4^3 способами. Остальные четыре человека будут мужчинами. Выбор четырех из шести мужчин можно осуществить C_6^4 способами. Следовательно число благоприятствующих исходов равно $C_4^3 C_6^4$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P=\frac{C_4^3 C_6^4}{C_{10}^7}=\frac{\frac{4!}{3!\cdot 1!}\ \frac{6!}{2!\cdot 4!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $P = \frac{1}{2}$.

№ 2. В компьютерном зале должна заниматься группа из 6 мальчиков и 6 девочек. Группу случайным образом разделили на две равные части. Какова вероятность того, что мальчиков и девочек в них окажется поровну?

Р е ш е н и е. $N = 6$, $M = 6$, $n = 3$, $m = 3$. Формула (1)

Всего способов выбора 6 человек из 12 равно $C_{12}^{6} = 924$. Среди выбранной группы из 6 человек должно находиться по 3 мальчика и 3 девочки. Количество таких исходов равно произведению количества способов выбора 3 мальчиков из 6 и 3 девочек из 6, т.е. $C_6^3 C_6^3 = 20 \cdot 20 = 400$. Вероятность события равна $P = \frac{C_6^3 C_6^3}{C_{12}^6} = \frac{400}{924} = 0{,}433$.

Ответ: $P = 0{,}433$.

№ 3. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Р е ш е н и е. Задача не отличается от основной задачи теории вероятности, изменены только обозначения. Нестандартных деталей будет $N - n$**.** Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т. е. C_N^m — числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; $\boldsymbol{m - k}$ нестандартных деталей можно взять из $\boldsymbol{N - n}$ стандартных деталей равно C_{N-n}^{m-k} способами; число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов $P = C_n^k C_{N-n}^{m-k} / C_N^m$.

Ответ: $P = C_n^k C_{N-n}^{m-k} / C_N^m$.

№ 4. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных 1, 2,…, 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся:

а) деталь № 1; б) деталь № 1 и № 2.

Р е ш е н и е: а) $N = 9$, $M = 1$, $n = 5$, $m = 1$. Формула (2)

Общее количество возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. C_{10}^{6}.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных 6 деталей есть деталь № 1 и, следовательно, остальные пять деталей имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которыми можно отобрать 5 деталей из оставшихся 9. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов $P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = 0{,}6$;

б) $N = 8$, $M = 2$, $n = 4$, $m = 2$. Формула (1).

Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных деталей есть детали № 1 и № 2, следовательно, четыре детали имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре детали из оставшихся восьми. Искомая вероятность $P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 1/3.

№ 5. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Р е ш е н и е. $N = 99$, $M = 1$, $n = 9$, $m = 1$. Формула (2).

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов n, которыми можно извлечь 10 карточек из 100 т.е. C_{100}^{10}. Число исходов, благоприятствующих событию, равно числу возможных вариантов извлечения 9 карточек из 99 карточек. Искомая вероятность равна отношению $P = \dfrac{C_{99}^{9}}{C_{100}^{10}} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

№ 6. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Р е ш е н и е. N = 10, M = 5, n = 3, m = 0. Формула (2).

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 3 детали из 15. Число исходов, благоприятствующих событию равно числу возможных вариантов извлечения 3 деталей из 10. Искомая вероятность равна отношению $P(A) = \dfrac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = 24/91$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = 24/91$.

№ 7. В ящике лежит 100 деталей, из них 10 – бракованные. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Р е ш е н и е: а) N = 90, M = 10, n = 4, m = 0. Формула (2). Общее число возможных элементарных исходов испытания равно количеству способов извлечь 4 детали из 100, т.е. $n = C_{100}^{4}$. Число благоприятствующих рассматриваемому событию исходов равно количеству способов извлечь 4 не бракованные детали, т.е. $n = C_{90}^{4}$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_{90}^{4}}{C_{100}^{4}}$;

б) N = 90, M = 10, n = 0, m = 4. Формула (2). Число благоприятствующих рассматриваемому событию исходов равно количеству способов извлечь **4** бракованные детали, т.е. $m = C_{10}^4$, тогда $P = \dfrac{C_{10}^4}{C_{100}^4} = 0{,}00005$.

№ 8. Устройство состоит из пяти элементов. Два из них изношены. При включении устройства включаются случайно два элемента из пяти. Найти вероятность того, что включенными окажутся два неизношенных элемента.

Р е ш е н и е: $N = 3$, $M = 2$, $n = 2$, $m = 0$. Формула (2). Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу вариантов включения двух элементов из пяти, что составляет C_5^2 . Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: оба включенных элемента не изношены, следовательно, все оставшиеся изношены. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно извлечь два неизношенных элемента из трех $C_3^2 = 3$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$.

№ 9. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ... , 120 и произвольно расположенных. Перфораторщик наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

Р е ш е н и е. В этой задаче $N = 2$, $M = 18$, $n = 2$, $m = 0$. Формула (3). Общее число элементарных исходов испытания? Вынуть пару перфокарт равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е равно $C_{20}^2 = 90$. Число исходов, благоприятствующих появлению одной пары перфокарт с номерами 101 и 120, равно только одному исходу $C_2^2 C_{18}^0 = 1$. Искомая вероятность равна 1/90.

Ответ: 1/90.

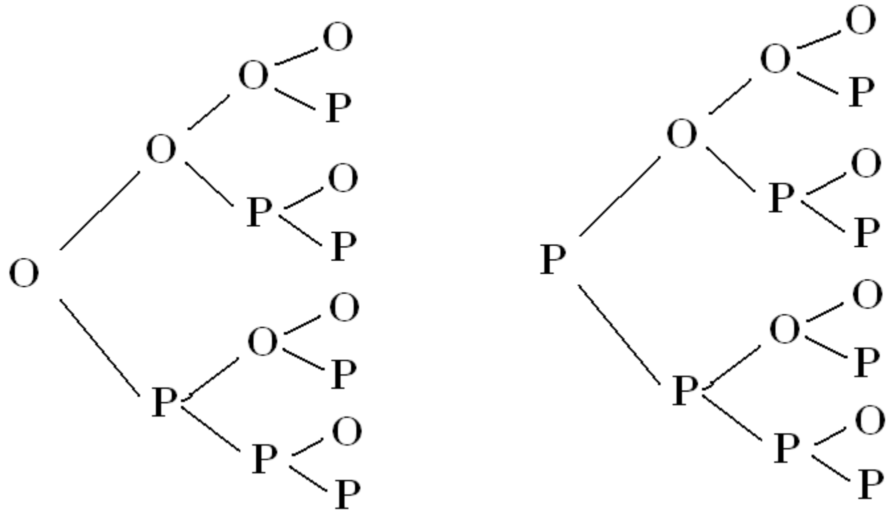
№ 10. В секретном замке на общей оси расположены четыре диска, каждый из них разделён на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определённое четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

Р е ш е н и е. Всего событий равно $n = 5^4 = 625$. Благоприятствующих всего одно.

Ответ: 1/625.

6.3. Разные задачи

№ 1. Монету бросают 4 раза подряд. Какова вероятность того, что в исходе «орлов» появится больше, чем «решек»?



Р е ш е н и е. Имеем всего 16 исходов $2^4 = 16$:
OOOO, OOOP, OOPO, OOPP, OPOO, OPOP, OPPO, OPPP, POOO, POOP, POPO, POPP, PPOO, PPOP, PPPO, PPPP.

При четырёхкратном бросании в $C_4^2 = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot} = 6$ число «орлов» равно числу «решек». Это такие исходы

OOPP, OPOP, OPPO, POOP, POPO, PPOO.

Следовательно, в 16 – 6 = 10 случаях эти числа не равны. Ровно в половине из них число «орлов» больше, чем «решек», т.е. в 5 исходах. Это такие исходы:

ОООО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО.

Следовательно, вероятность того, что «орлов» появится больше, равна 5/16.

Ответ: 5/16.

№ 2. Монету бросают 6 раз подряд. Какова вероятность, что «орлов» появится больше «решек»?

Р е ш е н и е. При шестикратном бросании имеется всего $2^6 = 64$ исхода, причем в $C_6^3 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot} = 20$ число «орлов» равно числу «решек». Следовательно, в 64 – 20 = 44 случаях эти числа не равны. Ровно в половине из них число «орлов» больше, чем «решек», т.е. в 22 случаях. Следовательно вероятность того, что «орлов» появится больше равна 22/64 = 11/32.

Ответ: 11/32.

№ 3. Монету бросают $2n$ раз подряд. Какова вероятность, что «орлов» появится больше, чем«решек»?

Р е ш е н и е. При $2\boldsymbol{n}$-кратном бросании имеется всего $\mathbf{2^{2n}}$ исхода, причем в C_{2n}^n число «орлов» равно числу «решек». Следовательно в $\mathbf{2^n}$ – C_{2n}^n случаях эти числа не равны. Ровно в половине из них число «орлов» больше, чем «решек», т.е. в случаях $\frac{2^n - C_{2n}^n}{2}$.

Ответ: $\frac{2^n - C_{2n}^n}{2}$.

№ 4. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить два белых шара равна 2/15. Сколько белых шаров в урне?

Р е ш е н и е. Всего исходов C_{10}^2. Обозначим количество белых шаров в урне через k. Тогда благоприятствующих событий будет C_k^2. Составим уравнение

$$\frac{C_k^2}{C_{10}^2} = \frac{k(k-1)}{10\cdot9} = \frac{2}{15}.$$

Отсюда получаем $k = 4$ белых шара.

Ответ: 4 .

№ 5. Одновременно бросают 3 кубика. Какова вероятность того, что:

а) на всех кубиках выпадут одинаковые числа;

б) все числа на кубиках разные;

в) выпало ровно два одинаковых числа?

Р е ш е н и е. Всего событий $n = 6^3$:

а) благоприятствующих событий 6

$$P = 6/6^3=1/36;$$

б) благоприятствующих событий $6 \times 5 \times 4$

$$P = (6 \times 5 \times 4) /6^3 = 20/36 = 5/9;$$

в) одинаковые числа могут появиться на двух кубиках в разных вариантах: 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3. Два одинаковых числа на двух кубиках могут выпасть 6 способами и на третьем может появиться любая из 5 чисел. Следовательно, всего способов равно $6 \times 5 =30$, но всего вариантов 3, поэтому число благоприятствующих сочетаний будет $3 \cdot 30 = 90$. Значит $P = 60 /6^3 = 5/12$.

Ответ: 5/12.

№ 6. Какое наименьшее число раз надо бросить монету, чтобы вероятность появления «орла» была больше 1/2.

Р е ш е н и е. Если бросать монету n раз, то событие {*появился хотя бы один* «орёл»} и событие {«орёл» *не появился*} – противоположные события. Вероятность события орёл не появился подсчитать легко: P (***A***) = $1/2^n$. Тогда вероятность {появился хотя бы один «орёл»} будет равна P(**O**) = $1 - 1/2^n$ и должна по условию быть больше 1/2. Решаем неравенство $1 - 1/2^n > 1/2$, очевидно решение $n > 1$, т.е. n больше или равно 2. В условии спрашивается минимальное значение, следовательно $n = 2$.

Ответ: 2.

№ 7. Какое наименьшее число раз надо бросить кубик, чтобы вероятность появления 6 была больше 1/2.

Р е ш е н и е. Решение аналогично предыдущей задаче. Если бросать кубик n раз, то событие {*появилась хотя бы одна* 6} и событие {6 *не появилась*} – противоположные события. Вероятность события {6 *не появилось*} равна $P_1 = (5/6)^n$. Тогда вероятность события {появится хотя бы одна 6} будет равно $P_2 = 1 - (5/6)^n$ и по условию должна быть больше 1/2. Решаем неравенство $1 - (5/6)^n > 1/2$, получаем решение $n > 3$. Минимальное значение рано $n = 4$.

Ответ: 4.

6.4. Относительная частота

№ 1. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Р е ш е н и е. W = 5/100 = 0,05.

Ответ: 0,05.

№ 2. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

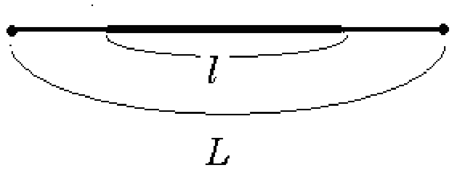
Р е ш е н и е. Относительная частота события $\boldsymbol{A}$ = {*попадание в цель*} равна отношению числа попаданий к числу произведенных выстрелов: $\mathbf{W}(A) = \frac{18}{20} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

6.5. Геометрическая вероятность

№ 1. На отрезке L длины 20 см помещён меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная на больший отрезок, попадает также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на большом отрезке.

Р е ш е н и е.



Так как вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения, то искомую вероятность можно найти по формуле

$$P(A)=\frac{l}{L}\ .$$

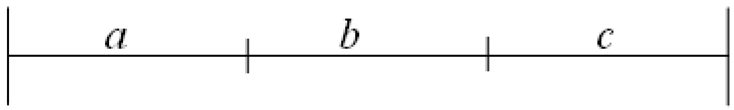
Подставляя наши значения (L = 20; l = 10) в данную формулу, получаем искомую вероятность

$$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

№ 2. На отрезок *OA* длины *L* числовой оси *Ox* наудачу поставлена точка *B*(*x*). Найти вероятность того, что меньший из отрезков *OB* или *BA* имеет длину, большую чем *L*/3. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Р е ш е н и е:

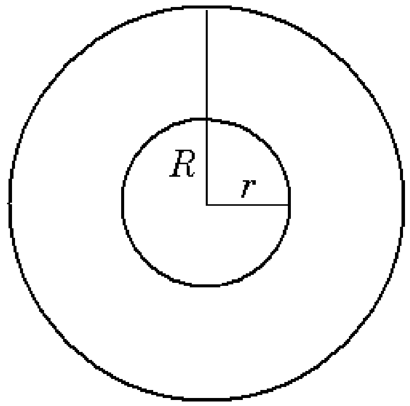


Разобьём отрезок *OA* на 3 отрезка длины $L/3$. Тогда для того, чтобы меньший из отрезков *OB* и *BA* имел длину, большую трети *L*, достаточно, чтобы точка попала в средний отрезок b . Следовательно $P(A)=\frac{1}{3}$.

Ответ: 1/3.

№ 3. В круг радиуса *R* помещен меньший круг радиуса *r*. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. (Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга, и не зависит от его расположения).

Р е ш е н и е:



Так как вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения, то мы можем вычислить вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг по формуле $P(A)=\frac{g}{G}$,где g – площадь малого круга, а G – площадь большого круга. Вычислим площади

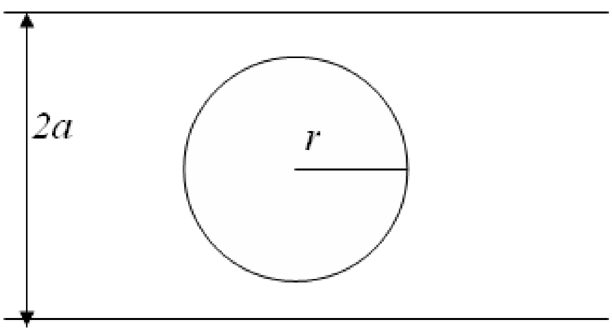
$g=\pi r^2$, $G=\pi R^2$.

Подставив их в формулу получим искомую вероятность $P(A)=\frac{r^2}{R^2}$.

Ответ: r^2/R^2.

№ 4. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Решение:



Для того чтобы монета не пересекла параллельные прямые, необходимо, чтобы при броске расстояние от монеты до прямых было равно

l = (2a – 2r).

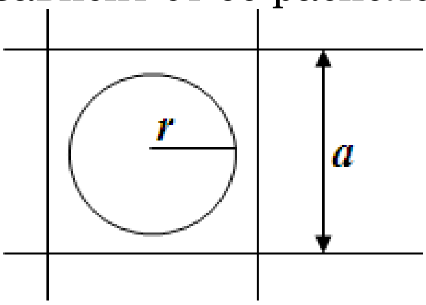
А общее расстояние между двумя прямыми таково

L = 2a.

Так как нам не важно, куда приземлится монета, а главное, чтоб она не пересекла прямые, то мы можем воспользоваться формулой $P(A)=\frac{l}{L}$ для нахождения вероятности того, что монета не пересечет ни одной из прямых. Тогда искомая вероятность равна $P(A)=\frac{2a-2r}{2a}=\frac{a-r}{a}$.

Ответ: $(a – r)/a$.

№ 5. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.



Р е ш е н и е. Событие $\boldsymbol{A}$ = {монета не пересечёт ни одной из сторон квадрата} можно представить в виде двух независимых событий: $\boldsymbol{B}$ = {*монета не пересечёт вертикальных линий*} и $\boldsymbol{C}$ ={*монета не пересечёт горизонтальных линий*}. Тогда вероятность наступления события $\boldsymbol{A}$ можно вычислить путём перемножения вероятностей событий $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$

$P(A)=P(B)*P(C)$.

По формулам из предыдущей задачи вычисляем вероятности событий B и C. Получаем, что

$P(B)=\frac{a-2r}{a}$; $P(C)=\frac{a-2r}{a}$.

Тогда искомая вероятность равна $P(A)=\frac{(a-2r)^2}{a^2}$

Ответ: $P(A)=0{,}75$.

№ 6. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $x < y$. (Координата точки C для удобства дальнейшего изложения обозначена через y). Найти вероятность того, что длина отрезка OB больше BC (рис. 15).

Р е ш е н и е:

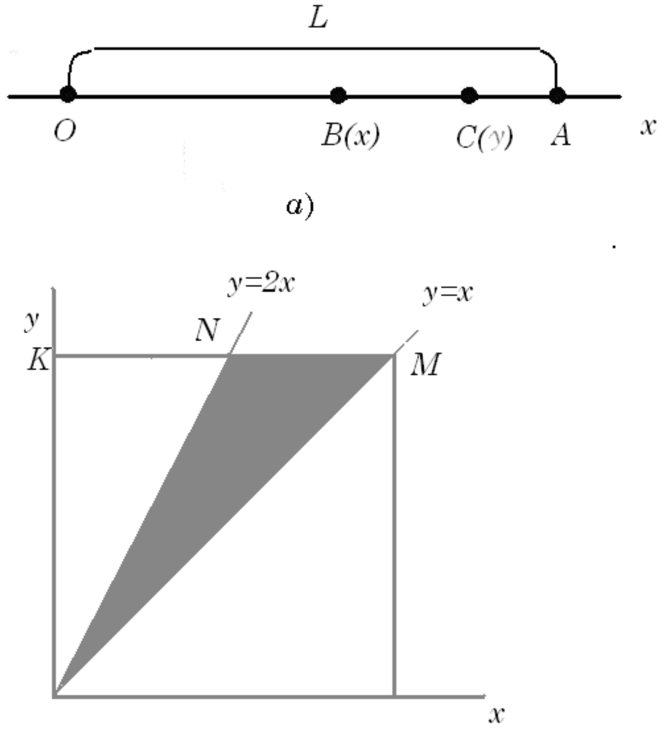


Рис. 15: *а*)две точки на отрезке ОА; *б*)площадь треугольника есть благоприятствующая площадь событию ***A*** = {длина отрезка ***OB*** больше ***BC***}

Координаты точек ***B*** и ***C*** должны удовлетворять неравенствам $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $y \ge x$. Введём в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей прямоугольному треугольнику ***OKM*** (рис. 15,*б*). Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру ***G***, координаты точек которой представляют соответственно все возможные значения координат точек ***B*** и ***C***.

Длина отрезка ***BC*** должна быть меньше длины отрезка ***OB***, т.е. должно иметь место неравенство $y-x<x$, или $y<2x$. Последнее неравенство выполняется для координат тех точек фигуры ***G*** (прямоугольного треугольника ***OKM***), которые лежат ниже прямой $y=2x$ (прямая ***ON***). Как видно из рис. 15,*б*), все эти точки принадлежат заштрихованному треугольнику ***ONM.*** Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру ***g***, координаты точки которой являются благоприятствующими интересующему нас событию (длина отрезка ***BC*** меньше длины отрезка ***OB***). Очевидно, что площадь треугольника ***ONM*** меньше площади тругольника ***OKM***) в два раза, поэтому искомая вероятность равна

$$P=\frac{\text{Пл}(g)}{\text{Пл}(G)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $P = 1/2$.

№ 7. Задача Бюффона (французский естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Р е ш е н и е. Введём следующие обозначения: x – расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ - угол, составленный иглой с этой параллелью (рис. 16 а).

Положение иглы полностью определяется заданием определённых значений x и φ, причём x принимает значения от 0 до ***a***; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис. 16,*б*). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру ***G***, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры $\boldsymbol{G}$ равна πa.

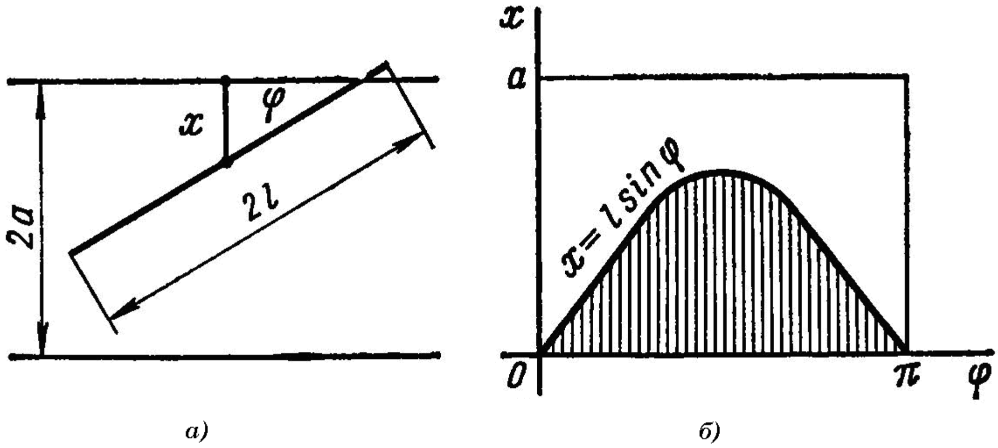


Рис. 16. Параллельные прямые и изображение иглы длиной $2l$. Прямоугольник имеет сторонами a и π, и кривая $x = l\boldsymbol{\sin}(\varphi)$. Площадь под кривой есть благоприятствующая событию $\boldsymbol{A}$ = {*игла пересечет параллель*}

Найдём теперь фигуру ***g***, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т.е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рис. 16, *а*), игла пересечёт ближайшую к ней параллель при условии $x \le l\sin\varphi$, т.е. если середина иглы попадёт в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис. 16,*б*).

Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру **g**. Найдём площадь этой фигуры:

$$\text{Пл}(g) = \int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = 2l .$$

Искомая вероятность того, что игла пересечёт прямую
$$P = \text{Пл}.g\,/\,\text{Пл}.G = 2l/(\pi a) .$$

Ответ: $2l\,/\,(\pi a)$.

№ 8. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

Р е ш е н и е. Обозначим моменты встречи двух студентов соответственно через x и y. Они могут встретиться в течение часа $T = 1$. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства: $0< x <1$, $0< y <1$. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy.

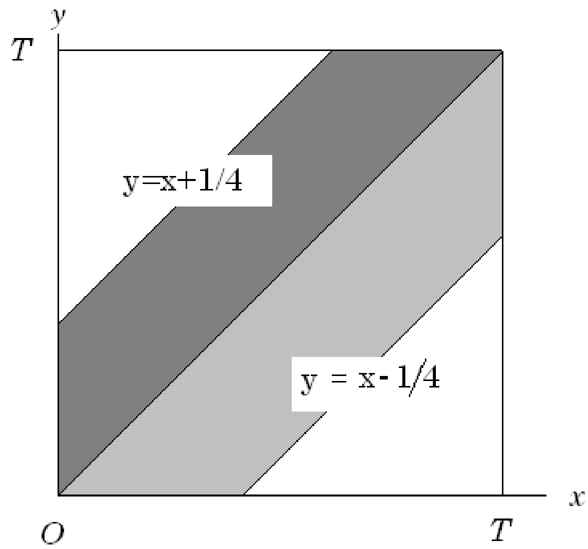


Рис.17. Суммарная площадь затенённых областей есть благоприятствующая событию встречи двух студентов

В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату со стороной $T = 1$. Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру ***G***, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов встречи студентов. Так как пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит, то пусть $t = 1/4$. Они встретятся, если разность между моментами меньше t, т. е. если $y – x < t$, при $y > x$, и $x — y < t$, при $x > y$, или, что то же,

$$y < x + t \quad \text{при} \quad y > x,$$
$$y > x - t \quad \text{при} \quad y < x.$$

Первое неравенство выполняется для координат тех точек фигуры $\boldsymbol{G}$, которые лежат выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = x+t$; второе неравенство имеет место для точек, расположенных ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = x - t$. Как видно из рисунка, все точки, координаты которых удовлетворяют обоим неравенствам, принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, точки которой имеют координаты благоприятствующими моментами времени x и y, когда студенты смогут встретиться. Искомая вероятность равна отношению площадей

$$P = \frac{\text{Пл}(g)}{\text{Пл}(\text{G})} = \frac{T^2 - 2(T-t)^2/2}{T^2} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Ответ: $P = 7/16$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Буникович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятности. М.: Дрофа, 2008.

2. Бродский Я.С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. М.: Оникс, 2008.

3. Гмурман В.М. Теория вероятностей математическая статистика. М.: Высшее образование, 2006.

4. Гмурман В.М. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Высшее образование, 2008.

5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События, вероятности, статистическая обработка данных. 7–9-е классы. М.: Мнемозина, 2009.

6. Письменный Д. Конспект Лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.:Высшее образование, 2008.

7. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10-й класс. М.: Просвещение, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Л е б е д е в Константин Андреевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Подписано в печать 30.05.2012. Печать цифровая.
Формат 60 × 84 1/16. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 500 экз.
Заказ №/*

Кубанский государственный университет
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Издательско-полиграфический центр
Кубанского государственного университета
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.