1.1. Найдите значение выражения 

*Решение*.

Умножим всю дробь на (3 – 2) = 1 и она не поменяет своего значения:

.

Далее получаем:

=== =  =1.

1.2. В прямоугольном треугольнике *АВС* проведена высота *СН* из вершины прямого угла. Из вершины *В* большего острого угла проведен отрезок *BK* так, что ∠*CBK* = ∠*CАB* (см. рисунок). Докажите, что *СН* делит *BK* пополам. (МО)

*Решение*. Пусть отрезки *СН* и *BK* пересекаются в точке *D* (см. рис. 1). Так как ∠*BСН* = ∠*CАB* = ∠*CBK*, то треугольник *BCD* – равнобедренный: *CD* = *BD*. Тогда *CD* – медиана прямоугольного треугольника *BCK*, то есть *BD* = *KD*.

*Заключительный вывод можно также сделать из того, что равны углы KCD и CKD (они дополняют равные углы до прямого), поэтому СD = KD.*

1.3. Буфетчик делает молочно-вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно-вишнёвого коктейля? (МО)

*Решение*. I способ. Пусть буфетчик заливает в миксер *x* литров сока. Стоимость *x* л сока составляет 30*x* рублей. Значит, стоимость молока, заливаемого в миксер, тоже составляет 30*x* рублей. Поскольку литр молока стоит 20 рублей, то 30*x* рублей соответствуют 1,5*x* л сока. В результате буфетчик получает (*x* + 1,5*x*) л коктейля общей стоимостью (30*x* + 30*x*) рублей. Чтобы узнать цену за литр молочно-вишнёвого коктейля, надо стоимость коктейля разделить на его объём, т. е. 60*x* разделить на 2,5*x*, получится 24 рубля.

II способ. На рубль в миксер заливается 1/20 литра молока, и ещё на рубль — 1/30 литра сока. Таким образом, стоимость обоих компонентов одинакова, причём на 2 рубля получается $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$ литра коктейля, поэтому литр коктейля стоит 2 ∙12 = 24 рубля.

2.1. При каких значениях числа *p* уравнение *x*2 + 4*px* + 3*p* + 1 = 0 имеет ровно 1 корень?

*Решение. x*2 + 4*px* + 3*p* + 1 = 0 – квадратное уравнение относительно *х*. Чтобы квадратное уравнение имело ровно 1 корень, его дискриминант должен равняться 0.

*D* = 16*p*2 − 4∙(3*p* + 1) = 0.

16*p*2 − 12*р* – 4 = 0.

4*p*2 − 3*p* – 1 = 0 .

Решим полученное квадратное уравнение и найдем его корни.

(4*p* + 1) ∙ (*p* – 1) = 0.

 

Ответ: −0,25 и 1.

2.2. Два равносторонних треугольника *АВС* и *CDE* имеют общую вершину (см. рисунок). Найдите угол между прямыми *AD* и *BE*. (Фольклор, олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина)

*Решение*: пусть *Р* – точка пересечения *АD* и *ВЕ*. Заметим, что $ΔACD=ΔDCE$ (по двум сторонам и углу между ними), откуда следует, что $∠DAC=∠EBC$.

Тогда $∠APB=180°-\left(∠PBA+∠PAB\right)=180°-\left(∠CBA+∠CAB\right)=60°$.

2.3. В клетках таблицы 3×3 расставили цифры от 1 до 9. Затем нашли суммы цифр в каждой строке. Какое наибольшее количество из этих сумм может оказаться полным квадратом?

*Ответ*: две.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 8 |
| 4 | 9 | 7 |

*Решение*. Наименьшая возможная сумма цифр в строке: 1 + 2 + 3 = 6, а наибольшая: 7 + 8 + 9 = 24. Значит, если сумма является полным квадратом, то она должна быть равна 9 или 16. Предположим, что в каждой строчке таблицы сумма равна 9 или 16, тогда сумма всех цифр в таблице равна 9 + 9 + 9 = 27 или 9 + 9 + 16 = 34 или 9 + 16 + 16 = 41 или 16 + 16 + 16 = 48. Но сумма чисел от 1 до 9 равна 45, то есть трех сумм – полных квадратов быть не может.

Две такие суммы возможны, например, см. таблицу:

*Отметим, что в этом примере полными квадратами являются суммы как в первых двух строчках, так и в первых двух столбцах*.

3.1. Докажите, что 

(Московская математическая регата)

*Решение.* 1)  =  =  =  = 2 + 1;

2)  =  =  =  =  – 1;

3)  =  =  =  =  + .



3.2. Дан треугольник *ABC*, где ∠*BAC* = 60°. Точка *S* — середина биссектрисы *AD*. Известно, что ∠*SBA* = 30°. Найдите *DC*/*BS*.

*Решение*. *АD* – биссектриса угла *BAD*, равного 600, значит ∠*SAD* = ∠*DAC* = 300. В треугольнике *SAВ* ∠*SAB* = ∠*SBA*, значит этот треугольник равнобедренный с основанием *АВ* и *SA* = *SB*. А также *S* – середина *AD*, поэтому *SA* = *SD* = *SB.* Значит треугольник *DBA* – прямоугольный с прямым углом *DBA*.

Треугольник *DBA* прямоугольный с углом *DAB*, равным 300, значит *AD* = 2*BD* и *AB* = *BD*.

В треугольнике *ABC* ∠*ABC* = 900, ∠*BAC* = 600, значит ∠*ACB* = 30° и *AC* = 2*AB* и *BC* = *AB*.

Пусть *BD* = *x*, тогда *AB* = *x*, *BS* = 0,5*AD* = *x*. *BC* = ∙*x* = 3*х*. *DC* = *BC* – *BD* = 3*x* – *х* = 2*х*. Получаем, что *DC*/*BS* = 2*х*/*х* = 2.

3.3. В игре «Разборки» за первое, второе и треть место дается некоторое (натуральное) количество очков, всегда одинаковое, за первое – больше всего, а за третье – меньше всего. Три друга сыграли в эту игру три раза и просуммировали набранные очки. Оказалось, что у Антона 16 очков, у Бориса – 9, а у Владимира – 5. Сколько баллов дается за каждое место и какие места заняли ребята?

*Решение.* Три друга всего за 3 игры набрали 16+9+5=30 очков, значит, за одну игру распределяется 10 очков.

Рассмотрим очки за 3е и 2е место и узнаем количество очков за 1е место.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3е место | 2е место | 1е место | Возможность варианта |
| 1 | 2 | 7 | + |
| 1 | 3 | 6 | + |
| 1 | 4 | 5 | + |
| 1 | 5…9 | 4…0 | - |
| 2 | 3 | 5 | + |
| 2 | 4…8 | 4…0 | - |
| 3…4 | 4…7 | 4…0 | - |

Возможны только 4 варианта: 1) 1, 2, 7; 2) 1, 3, 6; 3) 1, 4, 5; 4) 2, 3, 5.

В 4 вариант не подходят, т.к. минимальное количество очков за 3 игры – 6 очков, а у Владимира – 5.
В 3м варианте не получится подобрать очки, чтобы получить в сумме 5 (1 + 1 + 1 = 3, 1 + 1 + 4 > 5, в других вариантах еще больше).

Во 2м варианте нельзя подобрать очки у Антона: 6 + 6 + 6 = 18, 6 + 6 + 3 < 16, в других вариантах еще меньше.

В 1м варианте можно подобрать очки: 1 + 2 + 2 = 5, 1 + 1 + 7 = 9, 2 + 7 + 7 = 16.

*Ответ*: за 1е место – 7 очков, за 2е – 2 очка, за 1е – 1 очко. Владимир занял 3, 2 и 2 место, Борис – 3, 3 и 1 место, Антон – 2, 1 и 1 место.