Методические указания для выполнения практических работ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для обучающихся на специальности 09.02.01
Компьютерные системы и комплексы

01.09.2015

ГБПОУ ПМК
Преподаватель: Приказчикова Ольга Сергеевна

ОДОБРЕНА

на заседании предметно-цикловой комиссии «Компьютерные системы и комплексы»

Методическое пособие составлено на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Председатель предметно-цикловой комиссии

_______________О.С.Приказчикова

Разработчики:

О.С.Приказчикова

преподаватели предметно-цикловой комиссии специальности 09.02.01 "Компьютерные системы и комплексы" ГБПОУ ПМК

Методические рекомендации разработаны для обучающихся на специальности 09.02.01 изучающих дисциплину «Элементы высшей математики» для очной формы обучения. Содержат образцы решения задач, краткие теоретические сведения, практические работы

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
Решение СЛАУ методом Крамера

Цель: получить навыки решения СЛАУ методом Крамера.

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

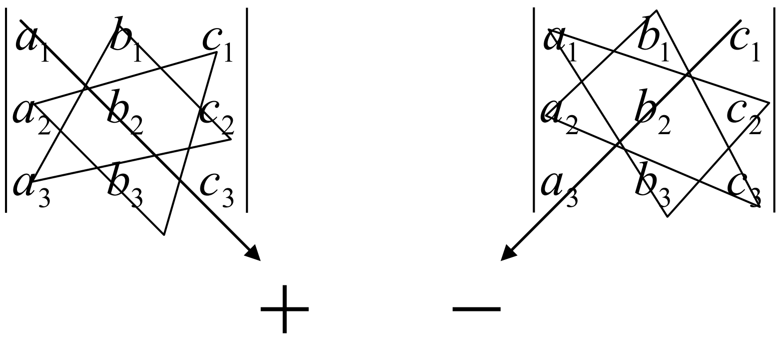
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (1)$$

Правило треугольника, для вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

(2)

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе (3) и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется **минором элемента a_{ij}.** Обозначается минор – M_{ij}.

Пример: Найти минор элемента a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - алгебраическое дополнение (4)

<u>**ТЕОРЕМА:**</u> Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (5)$$

<u>Пример:</u> Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1)^{1+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -2$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если в нем строки заменить на столбцы, а столбцы на строки с соответствующими номерами.

Примечание: Строки и столбца в определителе равноправны. Далее будем формулировать свойства только для строк, но нужно не забывать, что свойство справедливо и для столбцов.

2. При перестановке местами двух строк определитель сохраняет свое значение, но меняет знак на противоположный.
3. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.
4. Общий множитель элементов некоторой строки можно выносить за знак определителя.

Данное свойство иногда позволяет намного упростить вычисления, позволяет оперировать с меньшими числами.

5. Определитель, имеющий строку, состоящую из одних нулей, равен нулю.
6. Определитель не изменится, если к любой его строке добавить линейную комбинацию остальных его строк.

Определители и системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (6)$$

x_1 , x_2 , …, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, …., b_n - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix} \quad \dots \qquad (8)$$

Тогда решением системы (6) является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \dots, \qquad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение

2. Если D = Dx_1 = Dx_2 = … =Dx_n = 0, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если D = 0, но хотя бы один из Dx_1, Dx_2, … , Dx_n не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

Пример: Вычисление определителей

а) $D = \begin{vmatrix} 9 & -3{,}7 \\ 7 & -2{,}6 \end{vmatrix} = -23{,}4 + 25{,}9 = 2{,}5$

б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = -2 + 16 - 3 - 2 + 4 + 12 = 25$

Пример: Решение системы уравнений методом Крамера

а) $\begin{cases} 2x - y + 4z = -2 \\ x + 3y - z = 7 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 12 - 1 + 4 + 12 + 2 + 2 = 31$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix} = -12 + 4 + 28 - 48 - 2 + 14 = -16$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{matrix} = 28 - 2 + 16 + 28 + 8 + 4 = 82$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 24 + 7 - 2 - 6 - 14 + 4 = 13$$

$x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-16}{31}$; $y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{82}{31} = 2\dfrac{20}{31}$; $z = \dfrac{Dz}{D} = \dfrac{13}{31}$

Проверка: если $x = -\dfrac{16}{31}$; $y = \dfrac{82}{31}$; $z = \dfrac{13}{31}$, то

$$2*\left(-\frac{16}{31}\right) - \frac{82}{31} + \frac{4*13}{31} = \frac{-32 - 82 + 52}{31} = -\frac{62}{31} = -2$$

$$-\frac{16}{31} + \frac{3*82}{31} - \frac{13}{31} = \frac{-16 + 246 - 13}{31} = \frac{217}{31} = 7$$

$$\frac{16}{31}+\frac{82}{31}+\frac{2*13}{31}=\frac{16+82+26}{31}=\frac{124}{31}=4$$

Ответ: x = $-\frac{16}{31}$; y = $\frac{82}{31}$ = $2\frac{20}{31}$; z = $\frac{13}{31}$

<u>**Задание**</u>:

1 Вычислить определители

2 Решить системы уравнений методом Крамера

Вариант	Задание
1	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}2 & 3 \\ 8{,}1 & 4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y-3z=-10 \\ x+3y-3z=13 \\ x+y-z=7 \end{cases}$
2	1) а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 3.9 \\ 7 & 6.2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-y-2z=10 \\ -2x+3y+4z=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+2y-3z=-1 \\ x-3y+z=2 \\ 3x+y-2z=7 \end{cases}$
3	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ -x+2y+z=-6 \\ 3x+y-2z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x+2y-4z=7 \\ 2x+y+2z=-1 \end{cases}$
4	1) а) D = $\begin{vmatrix} 3{,}8 & -4{,}1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера:

	а) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -5 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + 2y - z = 11 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \end{cases}$
5	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}9 & -3 \\ 1{,}7 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} x - 3y + z = -7 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ -2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x - 2y + 2z = -4 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$
6	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}7 & -8 \\ 3{,}2 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -2x + 2y - z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + z = -4 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$
7	1) а) $D = \begin{vmatrix} 7 & -3{,}4 \\ 6 & -4{,}2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -2x + 2y + z = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 4y - z = 5 \\ 2x - 2y + 3z = -3 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$
8	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8{,}3 & -6 \\ 2{,}7 & -4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = -3 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x - 2y + z = 8 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$
9	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}8 & -7 \\ 2{,}4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

	2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 4x - y + z = 6 \\ x + 2y - 2z = -3 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ -2x + 2y - z = -7 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$
10	1) а) D = $\begin{vmatrix} 8 & -4{,}6 \\ 9 & -2{,}9 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ -2x - 3y + z = -5 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$
11	1) а) D = $\begin{vmatrix} 3{,}7 & -6 \\ 5{,}4 & -8 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$
12	1) а) D = $\begin{vmatrix} 9 & -3{,}7 \\ 7 & -2{,}6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x - y + 4z = -2 \\ x + 3y - z = 7 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 11 \\ 2x - y + 3z = -7 \\ 4x - 2y - z = 6 \end{cases}$
13	1) а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 5{,}6 \\ 9 & 12{,}2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 2x + y + 4z = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - 2z = -4 \end{cases}$
14	1) а) D = $\begin{vmatrix} 6{,}3 & -9 \\ 2{,}6 & -3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

	2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} -x+4y+z=7 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 2x+2y-3z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+2z=-2 \\ x+2y-3z=8 \\ -x+3y+z=4 \end{cases}$
15	1) а) D = $\begin{vmatrix} 7 & -3{,}8 \\ 9 & -4{,}3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) Решить систему методом Крамера: а) $\begin{cases} 2x-y+4z=1 \\ x+2y-z=8 \\ -2x+3y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ 2x+2y-z=7 \\ 2x-2y+2z=-3 \end{cases}$

Вывод:

В ходе данной работы были получены навыки решения СЛАУ методом Крамера, навыки вычисления определителей различных порядков

Контрольные вопросы:

- Определители второго порядка
- Определители третьего порядка
- Определители высших порядков
- Метод Крамера

Список литературы:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2
Решение СЛАУ матричным методом

<u>Цель:</u> получить навыки решения СЛАУ матричным методом

<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>

Для решения системы матричным методом необходимо вычислить обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы.

Тогда решение системы можно найти, используя $X=A^{-1}B$

Пример: Решить систему матричным способом.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0$$ - матрица невырожденная.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0\cdot 12 & 3\cdot 3 & (-3)\cdot 3 \\ -8\cdot 12 & 5\cdot 3 & (-1)\cdot 3 \\ 4 * 12 & (-4)\cdot 3 & 8\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ:x1=0, x2=-7, x3=5

<u>Задание:</u>

1. Решить СЛАУ матричным методом(см. задание 2 в практической работе 1)
2. Сделать проверку

<u>Контрольные вопросы:</u>

- Матрицы и действия над ними
- Вырожденная матрица
- Матричный метод

<u>Список литературы:</u>

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3
Решение СЛАУ методом Гаусса

Цель: получить навыки решения СЛАУ методом Гаусса

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Пример: Решить СЛАУ методом Гаусса $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ \qquad\quad -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

Пример: Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Выполненные элементарные преобразования:
(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –1.
(2) У второй строки сменили знак (умножили на –1). Вторую и третью строки поменяли местами. ***Обратите внимание****, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица,*

но еще и –1, что даже удобнее.
(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 5.
(4) У второй строки сменили знак (умножили на –1). Третью строку разделили на 14.
Обратный ход: $z=-1$

$y-2z=2 \Rightarrow y+2=2 \Rightarrow y=0$

$x+2y+3z=1 \Rightarrow x+0-3=1 \Rightarrow x=4$

Ответ: $x=4, y=0, z=-1$.

Задание:

3. Решить СЛАУ методом Гаусса(см. задание 2 в практической работе 1)
4. Сделать проверку

Контрольные вопросы:

- Метод Гаусса

Список литературы:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4
Непрерывность функции, точки разрыва

<u>Цель:</u> получить навыки исследования функции на непрерывность

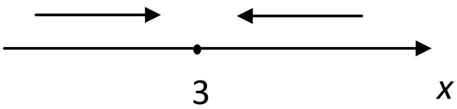
<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>
Определение: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$.
Определение детализируется в следующих условиях:
1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.
2) Должен существовать общий предел функции $\lim\limits_{x\to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to k-0} f(x) = \lim\limits_{x\to k+0} f(x)$.
3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$.

<u>Ход работы:</u>
а) $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$**;** $x_0 = 3$

$D(y) = (-\infty;3) \cup (3;\infty)$

$\lim_{x\to 3+0} \dfrac{1}{3-x} = \infty$

$\lim_{x\to 3-0} \dfrac{1}{3-x} = -\infty$



$x_0 = 3{,}1$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-3{,}1} = -10$

$x_0 = 3{,}01$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-3{,}01} = -100$

$x_0 = 3{,}001$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-3{,}001} = -1000$

$\downarrow 3 \qquad \downarrow \infty$

$x_0 = 2{,}9$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-2{,}9} = 10$

$x_0 = 2{,}99$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-2{,}99} = 100$

$x_0 = 2{,}999$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3-2{,}999} = 1000$

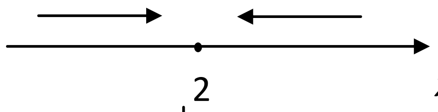
$\downarrow 3 \qquad \downarrow \infty$

$\lim_{x\to 3-0} f(x) \neq \lim_{x\to 3+0} f(x) \Rightarrow$ предел функции в точке $x_0 = 3$ не существует $\Rightarrow$ функция $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ не является непрерывной в точке $x_0 = 3$. Точка $x_0 = 3$ - точка разрыва второго рода.

б) $f(x) = \begin{cases} 4x+1, x \geq 1 \\ x^2 - 3, x < 1 \end{cases}$ $x_0 = 2$ $x_0 = 1$

$D(y) = (-\infty; \infty)$

- $\begin{matrix} \lim_{x\to 2-0} f(x) = 9 \\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = 9 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$



$x_0 = 1{,}9$ $f(x) = 4*1{,}9+1 = 8{,}6$

$x_0 = 1{,}99$ $f(x) = 4*1{,}99+1 = 8{,}96$

$x_0 = 1{,}999$ $f(x) = 4*1{,}999+1 = 8996$

2 9

$x_0 = 2{,}1$ $f(x) = 4*2{,}1+1 = 9{,}4$

$x_0 = 2{,}01$ $f(x) = 4*2{,}01+1 = 9{,}04$

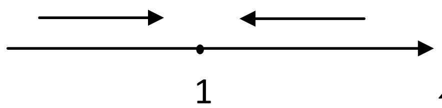
$x_0 = 2{,}001$ $f(x) = 4*2{,}001+1 = 9{,}004$

2 9

f(x) = 4*2 + 1 = 9

Функция в точке $x_0 = 2$ является непрерывной.

- $\begin{matrix} \lim_{x\to 1-0} f(x) = -2 \\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = 5 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 1-0} f(x) \neq \lim_{x\to 1+0} f(x) \Rightarrow$ предел функции в точке $x_0 = 1$ не существует. Функции в точке $x_0 = 1$ не являются непрерывной. Точка $x_0 = 1$ - точка разрыва первого рода.



$x_0 = 0{,}9$ $f(x) = 0{,}9^2 - 3 = -2{,}19$

$x_0 = 0{,}99$ $f(x) = 0{,}99^2 - 3 = -2{,}0199$

$x_0 = 0{,}999$ $f(x) = 0{,}999^2 - 3 = -2{,}001999$

1 -2

$x_0 = 1{,}1$ $f(x) = 4*1{,}1+1 = 5{,}4$

$x_0 = 1{,}01$ $f(x) = 4*1{,}01+1 = 5{,}04$

$x_0 = 1{,}001$ $f(x) = 4*1{,}001+1 = 5{,}004$

1 5

в) $f(x) = \begin{cases} 3|x|, |x| \leq 2 \\ 4, |x| > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$

$D(y) = (-\infty; \infty)$

$|x| \le 2 \Rightarrow x \in [-2;2]$

$|x| > 2 \Rightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -2-0} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to -2+0} f(x) = 6\end{aligned}\right. \Rightarrow \lim_{x\to -2-0} f(x) \ne \lim_{x\to -2+0} f(x) \Rightarrow$ предел функции в точке $x_0 = 2$ не существует. Функции в точке $x_0 = 2$ не являются непрерывной. Точка $x_0 = 2$ - точка разрыва первого рода.

$x_0 = -2{,}1$ $\quad f(x) = 4$

$x_0 = -2{,}01$ $\quad f(x) = 4$

$x_0 = -2{,}001$ $\quad f(x) = 4$

-2 $\quad$ 4

$x_0 = -1{,}9$ $\quad f(x) = 5{,}7$

$x_0 = -1{,}99$ $\quad f(x) = 5{,}97$

$x_0 = -1{,}999$ $\quad f(x) = 5{,}997$

-2 $\quad$ 6

<u>Задание:</u> Определить, является ли функция непрерывной в указанных точках. Построить графики функций

Вариант	Задание
1	а) $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$; $x_0 = 4$ б) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{x}^2+1; \mathrm{x}<0 \\ 2\mathrm{x}; \mathrm{x} \ge 0 \end{cases}$ $x_0 = 1$; $x_0 = 0$ в) $f(x) = \begin{cases} 2\|x\|; \|x\| \le 1 \\ 4; \|x\| > 1 \end{cases}$ $x_0 = 2$
2	а) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $x_0 = 3$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2-1; x \ge 0 \\ 2x+1; x<0 \end{cases}$ $x_0 = -2$; $x_0 = 0$ в) $f(x) = \begin{cases} 3\|x\|; \|x\| \ge 1 \\ 4; \|x\| < 1 \end{cases}$ $x_0 = 0$
3	а) $f(x) = \dfrac{1}{7-x}$; $x_0 = 7$ б) $f(x) = \begin{cases} 3x+2; x \ge 0 \\ 7x^2; x<0 \end{cases}$ $x_0 = -1$; $x_0 = 0$

	в) $f(x)=\begin{cases}4\lvert x\rvert; \lvert x\rvert \le 1\\ 5; \lvert x\rvert > 1\end{cases}$ $x_0=2$
4	а) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$; $x_0=3$ б) $f(x)=\begin{cases}x; x\le 0\\ x^2-3x; x>0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=-1$ в) $f(x)=\begin{cases}5\lvert x\rvert; \lvert x\rvert \ge 2\\ -1; \lvert x\rvert < 2\end{cases}$ $x_0=3$
5	а) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; $x_0=-1$ б) $f(x)=\begin{cases}2x^2-1; x\le 0\\ 3; x>0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=-3$ в) $f(x)=\begin{cases}2\lvert x\rvert; \lvert x\rvert \ge 1\\ -3; \lvert x\rvert < 1\end{cases}$ $x_0=-1$
6	а) $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$; $x_0=5$ б) $f(x)=\begin{cases}4x+1; x>2\\ -2x; x\le 2\end{cases}$ $x_0=3$ в) $f(x)=\begin{cases}3\lvert x\rvert; x\ge 0\\ 2; x<0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=1$
7	а) $f(x)=\begin{cases}x^2-1; x\le 0\\ 2x; x>0\end{cases}$ $x_0=2$; $x_0=0$ б) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; $x_0=-3$ в) $f(x)=\begin{cases}2\lvert x\rvert; \lvert x\rvert \le 1\\ 2; \lvert x\rvert > 1\end{cases}$ $x_0=-1$
8	а) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{1}{5-\mathrm{x}}$ $\mathrm{x}_0=5$ б) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}-\mathrm{x}^2-3; \mathrm{x}<0\\ 3\mathrm{x}; \mathrm{x}\ge 0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=2$

	в) $f(x)=\begin{cases}3\lvert x\rvert;\lvert x\rvert\le 2\\ 5;\lvert x\rvert>2\end{cases}$ $x_0=$
9	а) $f(x)=\begin{cases}7+x;x<0\\ 8x^2;x\ge 0\end{cases}$ $x_0=2$; $x_0=0$ б) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ $x_0=3$ в) $f(x)=\begin{cases}2;\lvert x\rvert>1\\ \lvert x\rvert;\lvert x\rvert\le 1\end{cases}$ $x_0=0$
10	а) $f(x)=\begin{cases}4+x;x\le 0\\ 2x^2+1;x>0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=3$ б) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ $x_0=-4$ в) $f(x)=\begin{cases}2\lvert x\rvert;\lvert x\rvert\le 1\\ \dfrac{1}{2};\lvert x\rvert>1\end{cases}$ $x_0=1$
11	а) $f(x)=\begin{cases}2+x;x>0\\ x^2+1;x\le 0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=2$ б) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ $x_0=3$ в) $f(x)=\begin{cases}3;\lvert x\rvert<1\\ 2\lvert x\rvert;\lvert x\rvert\ge 1\end{cases}$ $x_0=1$
12	а) $f(x)=\begin{cases}x^2-1;\ x\le 0\\ 2;\ x>0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=2$ б) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ $x_0=-2$ в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lvert x\rvert;\lvert x\rvert\le 1\\ 3;\lvert x\rvert>1\end{cases}$ $x_0=1$
13	а) $f(x)=\begin{cases}7\lvert x\rvert;\lvert x\rvert\le 1\\ -2;\lvert x\rvert>1\end{cases}$ $x_0=2$

	б) $f(x)=\dfrac{2}{3+x}$; $x_0=-3$ в) $f(x)=\begin{cases}3x-1; x<0\\ x^2; x\ge 0\end{cases}$ $x_0=2$; $x_0=0$
14	а) $f(x)=\begin{cases}3x+1; x\ge 0\\ 2x^2; x<0\end{cases}$ $x_0=0$; $x_0=2$ б) $f(x)=\dfrac{1}{x-7}$; $x_0=7$ в) $f(x)=\begin{cases}5\lvert x\rvert; \lvert x\rvert\ge 1\\ -3; \lvert x\rvert<1\end{cases}$ $x_0=1$
15	а) $f(x)=\begin{cases}3\lvert x\rvert; \lvert x\rvert\le 1\\ 2; \lvert x\rvert>1\end{cases}$ $x_0=-1$ б) $f(x)=\begin{cases}3x+3; x<0\\ 2x^2+1; x\ge 0\end{cases}$ $x_0=2$; $x_0=0$ в) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$; $x_0=-3$

Вывод:

В ходе выполненной работы были получены навыки исследования функции на непрерывность

Контрольные вопросы:

- Точки разрыва 1 и 2 рода
- Непрерывность функции в точке и на промежутке

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5
Первый замечательный предел

<u>**Цель:**</u> получить навыки вычисления пределов

<u>**Методические рекомендации для выполнения практической работы:**</u>

Рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.Согласно правилу нахождения пределов подставим ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, которую раскрывать не нужно.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**.

Пример:. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

В подобных случаях первый замечательный предел нужно организовать самостоятельно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

используя искусственный прием.

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Пример: Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$

*Решение:*Пробуем подставить ноль в числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}$$

Используем тригонометрическую формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}$$

Постоянные множители вынесем за значок предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}$$

Организуем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}$$

Здесь у нас только один замечательный предел, который превращается в единицу и исчезает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}$$

Избавимся от «трехэтажности»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)$$

Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Задание:

Вычислить пределы

Вариант	Задание1	Задание2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-7x-8}{x-8}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg8x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}3xctg9x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{x^4}$	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+8x-3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{6x^2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2+7x-2}{3x^2+5x-2}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg5x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{6x^2}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-8x-3}{5x^2-16x+3}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{5x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{8x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 4x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg10x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{11x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{5x^2+9x-2}{3x^2+7x+2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}$		$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{4-x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{7x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 4x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2\frac{x}{2}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3}{\sin^3 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg8x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{5x-x^2-6}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg9x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2+3x-1}{3x^2+4x+1}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{6x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{4x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{9x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{5x^2+9x-2}{3x^2+7x+2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\arcsin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 7x}{5x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{9x}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 5x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 15x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg10x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}2xctgx$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin 2x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{4+x}$

15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\arcsin 3x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-2x-12}{3x^2+9x+6}$

Вывод:

В ходе выполненной работы были получены навыки вычисления первого замечательного предела

Контрольные вопросы:

- Первый замечательный предел
- Эквивалентные функции

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6
Второй замечательный предел

Цель: получить навыки вычисления пределов

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$, $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ **- второй замечательный предел**

Справка: $e = 2{,}718281828\ldots$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Пример: Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Решение: Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$, Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. В данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{\text{e (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Пример: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Решение: Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞}. Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Легко заметить, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ устроено, далее:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}^{\to 0}}{1+\frac{1}{x}_{\to 0}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

<u>Задание:</u>

Вычислить пределы

Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-6}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-2}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{6x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-4)(x+1)}{x^3+x^2+2}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x+2}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{2x^2-3x+5}$
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{7x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{7x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{7x}\right)^{8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^2+2}-x^2\right)$
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{9x}\right)^{8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки вычисления второго замечательного предела

Контрольные вопросы:

- Второй замечательный предел
- Эквивалентные функции

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7
Производная сложной функции

Цель: получить навыки нахождения производной сложной функции

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$1. C' = 0$

$2. x' = 1$

$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$4. (a^x)' = a^x \ln a$

$5. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$

$6. (e^x)' = e^x$

$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$9. (\sin x)' = \cos x$

$10. (\cos x)' = -\sin x$

$11. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$12. (ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15. (arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$16. (arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$17. (sh\,x)' = ch\,x$

$18. (ch\,x)' = sh\,x$

$19. (th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

$20. (cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ:

$$\mathbf{C' = 0}$$
$$\mathbf{(Cu)' = Cu'}$$
$$\mathbf{(u + v)' = u' + v'}$$
$$\mathbf{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$
$$\mathbf{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ:

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot u'$.
5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
9. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
10. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
16. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
17. $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$
18. $(\mathrm{th}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$

Пример: Найти производные заданных функций а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

Решение: $y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2}$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение: Используем формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

в) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$;

Решение: Используем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)'\cos x - x^2(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin(x^2 + 3)$;

Решение: Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

д) $y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение: Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение: $y' = (x^2)' e^{\sin x} + x^2 (e^{\sin x})' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x.$

Задание:

Найти производные функций

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^2} + 3$, б) $y = \sin x \cdot arctg\ x$, в) $y = \dfrac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$, г) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$, д) $y = \dfrac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$, е) $y = \arccos\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$,	а) $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$ б) $y = \sqrt{x}\sin x$, в) $y = \dfrac{tgx}{\sin x - \cos x}$, г) $y = ctg(2x \sin\dfrac{1}{2})$, д) $y = (\arccos x + \arcsin x)^2$, е) $y = arctg \ln(2x + 3)$,	а) $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$, б) $y = e^x tgx$, в) $y = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$, г) $y = tg\dfrac{x + 1}{2}$, д) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, е) $y = \ln(1 - 2x)$, ж) $y = \sin 2^x + 3^{\sin x}$,

ж) $y=(1+\ln\sin x)^2$,	ж) $y=tg\,\dfrac{e^x}{x}$,	
Вариант 4	**Вариант 5**	**Вариант 6**
а) $y=7x^4-\sqrt[7]{x^2}-\dfrac{1}{x^4}+\sqrt{7}$, б) $y=e^x ctgx$, в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, г) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\sin 2x$, д) $y=\dfrac{x-1}{\ln x}$, е) $y=x^2e^x$, ж) $y=tg^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$,	а) $y=8x^3-3\sqrt[5]{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{3}$, б) $y=xarctgx$, в) $y=\dfrac{x}{\sin x}$, г) $y=tg\sqrt{x}+\dfrac{1}{ctg(2x-1)}$, д) $y=\ln\dfrac{x}{e^x}$, е) $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot\ln x$, ж) $y=x^2 10^{-x+2}$	а) $y=x^{10}-3\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{10}$ б) $y=e^x\arcsin x$ в) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$ г) $y=3\sin(3x-1)$ д) $y=(1-2\sqrt[3]{x})^2$ е) $y=\dfrac{1}{4}tg^4x+\dfrac{1}{2}tg^2x$ ж) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln 2x}$
Вариант 7	**Вариант 8**	**Вариант 9**
а) $y=10x^5-\dfrac{1}{4x^4}$ б) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin x$ в) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$ г) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ д) $y=\ln(1-ctgx)$ е) $y=e^{-x}+10^{\ln x}$ ж) $y=arctg\,\dfrac{1+x}{1-x}$	а) $y=7x^5-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}$ б) $y=\sqrt[3]{x}\cos x$ в) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$ г) $y=\dfrac{1}{\cos^2 2x}$ д) $y=(arctgx+x)^2$ е) $y=tg5x\sin 7x$ ж) $y=\cos^2 2x\sin^2 3x$	а) $y=3x^{12}+4\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[4]{10}$ б) $y=(\sqrt{x}-4)\sin x$ в) $y=\dfrac{e^x}{arctgx}$ г) $y=\sin(3x-5)$ д) $y=e^{x^2-3}tgx$ е) $y=\ln\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$ ж) $y=arctg\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
Вариант 10	**Вариант 11**	**Вариант 12**
а) $y=7x^3+\dfrac{1}{2x^2}+\sqrt{x+\sqrt[3]{5}}$ б) $y=(x^3+1)\sin x$ в) $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ г) $y=\dfrac{tgx}{\sin x+3}$ д) $y=2^{x+\sin x}$ е) $y=\arccos\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ ж) $y=\ln(tg^2 2x)$	а) $y=5x^7+\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[3]{3}$ б) $y=(\sqrt[3]{x}+1)arctgx$ в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x}-x}$ г) $y=arcctg(4x^2+1)$ д) $y=\sin^3 x+2\sin x+x^3$ е) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{x}$ ж) $y=3^{arctg(x^2+1)}+\sqrt{2}$	а) $y=4x^9-\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\sqrt[7]{2}$ б) $y=e^x arctgx$ в) $y=\dfrac{ctgx}{x-x^3}$ г) $y=\sin(\dfrac{x}{x^2+1})$ д) $y=(arctgx+e^x)^2$ е) $y=\log_2\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$ ж) $y=\arcsin(tg^2x)$

Вариант 13	**Вариант 14**	**Вариант 15**
а) $y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \dfrac{3}{x^8} - 2$ б) $y = \sqrt{x}\cos x$ в) $y = \dfrac{arctgx}{e^x - \sin x}$ г) $y = \log_7 \sin x$ д) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$ е) $y = 2^{\log_3 x}$ ж) $y = arctg\,\dfrac{3 - x}{x - 2}$	а) $y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$ б) $y = e^x ctgx$ в) $y = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin x}$ г) $y = \log_5(\sqrt[3]{x} + 2x)$ д) $y = (\sin x + \sqrt[3]{x^2})^2$ е) $y = \log_2 \sin x$ ж) $y = \sin\dfrac{\ln x}{x}$	а) $y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$ б) $y = e^x arcctgx$ в) $y = \dfrac{e^x}{arcctgx}$ г) $y = \sin(5x^2 + 1)$ д) $y = \ln(1 + 2\sin x)$ е) $y = arctg \ln x$ ж) $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{1 - 3x}}{x}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения производной сложной функции

Контрольные вопросы:

- Производная функции
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8
Дифференциал функции

Цель: получить навыки нахождения дифференциала, применения дифференциала к приближенным вычислениям

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то есть приращение этой функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и нелинейного членов:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции называется линейная относительно Δx часть приращения функции. Она обозначается как dy или $df(x)$. Таким образом:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Дифференциал функции составляет основную часть ее приращения.
Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента.
По определению **дифференциал аргумента** есть приращение аргумента:

$$dx = \Delta x$$

Формулу для дифференциала функции можно записать в виде:

$$dy = f'(x)dx$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям основывается на формуле :
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$

Пример: Вычислить дифференциалы функций

а) $y = \dfrac{5x-3}{\sin x}$

$$dy = y'(x)dx$$

$$y' = \frac{(5x-3)'\sin x - (5x-3)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{5\sin x - 5x\cos x + 3\cos x}{\sin^2 x}$$

$$dy = \frac{5\sin x - 5x\cos x + 3\cos x}{\sin^2 x}dx$$

б) $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

$$y' = (\sqrt{3x^2 - 4x + 1})' * (3x^2 - 4x + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} * (6x - 4)$$

$$dy = \frac{6x-4}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}dx$$

Пример: Вычислить приближенно значение выражений с помощью дифференциала

а) $\sqrt[6]{0{,}983}$

$$(x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

$$\sqrt[6]{x} \approx \sqrt[6]{x_0} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x_0^{\ 5}}}\Delta x$$

x = 0,983 $\quad x_0 = 1 \quad \Delta x = x - x_0 = -0{,}017$

$$\sqrt[6]{0{,}983} = \sqrt[6]{1} + \frac{1}{6\sqrt[6]{1^5}} * (-0{,}017) = 1 - \frac{0{,}017}{6} = \frac{6-0{,}017}{6} = 0{,}997$$

б) $(2{,}012)^5$

$$y = x^n\ ,\ \ y' = nx^{n-1}$$

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^{\ n} + nx_0^{\ n-1}\Delta x$$

$$x = 2{,}012 \qquad x_0 = 2 \qquad \Delta x = 0{,}012$$

$$(2{,}012)^5 \approx 2^5 + 5*2^4*0{,}012 = 32{,}96$$

в) $\sin 29^0$

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x$$

$$x = 29^0 \qquad x_0 = 30^0 \qquad \Delta x = 29^0 - 30^0 = -1^0$$

$$\alpha = \frac{\hbar * n}{180^0} \qquad \alpha = \frac{\hbar*(-1)}{180} = -\frac{\hbar}{180} = -\frac{3{,}14}{180}$$

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 * (-\frac{3{,}14}{180}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{3{,}14}{180} = \frac{180 - 3{,}14*1{,}7}{360} =$$

$$= \frac{174{,}662}{360} \approx 0{,}485$$

г) $\ln 1{,}204$

$$\ln x \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\Delta x$$

$$x = 1{,}204 \qquad x_0 = 1 \qquad \Delta x = 0{,}204$$

$$\ln 1{,}204 = \ln 1 + \frac{1}{1} * 0{,}204 = 0{,}204$$

Задание:

Вариант	Задание
1	1) Найти дифференциал функции: а) $y = \frac{4x+5}{\cos x}$ б) $y = \log_3(2x+1)$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt[4]{80{,}302}$ б) $\cos 32°$ в) $(4{,}021)^5$ г) $\ln 1{,}008$
2	1) Найти дифференциал функции: а) $y = \frac{5x-3}{\sin x}$ б) $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt[6]{0{,}983}$ б) $(2{,}012)^5$ в) $\sin 36°$ г) $\ln 1{,}204$

3	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 4^{5x^3 - 7x}$ б) $y = \mathrm{tg}x2x$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\cos 28^\circ$ б) $\ln 0{,}987$ в) $\sqrt[3]{8{,}085}$ г) $(2{,}032)^4$
4	1) Найти дифференциал функции: а) $y = (5x^2 - 4)tgx$ б) $y = \sqrt{15x - x^3}$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $(0{,}983)^4$ б) $\sqrt[3]{26{,}99}$ в) $\sin 28^\circ$ г) $\ln 0{,}991$
5	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 5^x \cos x$ б) $y = \sqrt{3x^2 - 5x}$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt{48{,}93}$ б) $\ln 1{,}012$ в) $\cos 63^\circ$ г) $(2{,}053)^3$
6	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 7x^2 tgx$ б) $y = \log_2(4x^3 - 5x + 1)$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\ln 0{,}997$ б) $\sqrt{121{,}071}$ в) $\cos 64^\circ$ г) $(3{,}024)^3$
7	1) Найти дифференциал функции: а) $y = tgx(4x - 1)$ б) $y = \sqrt{7x^2 - 4x + 5}$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\cos 62^\circ$ б) $\ln 0{,}95$ в) $(1{,}031)^5$ г) $\sqrt{80{,}942}$
8	1) Найти дифференциал функции: а) $y = \sin x(4x^2 - 5x + 1)$ б) $y = \sqrt{6x - 10x^3}$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt[3]{26{,}92}$ б) $(3{,}21)^3$ в) $\ln 0{,}994$ г) $\cos 61^\circ$
9	1) Найти дифференциал функции: а) $y = \dfrac{ctgx}{4x + 5x}$ б) $y = \ln(2x^2 - 3x)$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\cos 61^\circ$ б) $\ln 1{,}093$ в) $\sqrt[3]{124{,}97}$ г) $(4{,}023)^3$
10	1) Найти дифференциал функции: а) $y = \dfrac{4x - 5x^3}{\sin x}$ б) $y = \cos(4x - 5x^3)$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sin 29^\circ$ б) $\ln 1{,}123$ в) $\sqrt{15{,}99}$ г) $(1{,}073)^4$
11	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 3^x \sin x$ б) $y = \sqrt{4x - 2x^3}$ 2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt{80{,}991}$ б) $\ln 0{,}927$ в) $\cos 58^\circ$ г) $(1{,}037)^4$

12	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 2^x \cos x$ б) $y = \log_2(4x^3 - 5x)$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt{63{,}996}$ б) $\cos 59°$ в) $\ln 0{,}92$ г) $(5{,}026)^3$
13	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 7^x \sin x$ б) $y = \sqrt{10x - 7}$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sqrt{64{,}025}$ б) $\cos 63°$ в) $\ln 1{,}03$ г) $(5{,}013)^3$
14	1) Найти дифференциал функции: а) $y = tgx(7x^2 - 9)$ б) $y = \log_3(6x^2 + 5)$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\sin 33°$ б) $\ln 1{,}094$ в) $\sqrt[3]{27{,}031}$ г) $(2{,}041)^5$
15	1) Найти дифференциал функции: а) $y = 11^x tgx$ б) $y = \sqrt{3x^7 - 4x + 5}$
	2) Найти приближенное значение с помощью дифференциала: а) $\cos 27°$ б) $\ln 1{,}047$ в) $(2{,}031)^4$ г) $\sqrt{120{,}98}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения дифференциала и его применения к приближенным вычислениям

Контрольные вопросы:

- Дифференциал функции
- Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9
Общая схема исследования функции

<u>Цель:</u> получить навыки исследования функции с помощью производной, построения графика

<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>

Пример: Исследование функции с помощью производной

$$y = -\frac{x^3}{9-x^2}$$

- $D(y) = (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;\infty)$

  $9 - x^2 \neq 0$

  $x^2 \neq 9$

  $x \neq \pm 3$

- $y(-x) = -\dfrac{(-x)^3}{9-(-x)^2} = -\dfrac{-x^3}{9-x^2} = \dfrac{x^3}{9-x^2}$

  $y(-x) = -y(x)$ – функция не четная, график функции симметричен относительно начала координат.

- $$y' = \frac{(-x^3)'(9-x^2)-(-x^3)(9-x^2)'}{(9-x^2)^2} = \frac{-3x^2(9-x^2)-(-x^3)(-2x)}{(9-x^2)^2} =$$

  $$= \frac{-27x^2+3x^4-2x^4}{x^4-18x^2+81} = \frac{-27x^2+x^4}{x^4-18x^2+81}$$

  $y' = 0,\ \dfrac{-27x^2+x^4}{x^4-18x^2+81} = 0$

  Дробь в том случае равна нулю, если её числитель равен нулю:

  $x^4 - 27x^2 = 0$

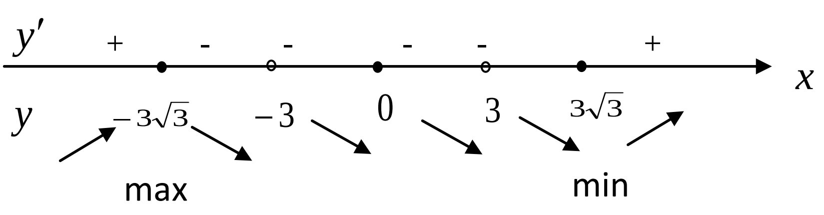
  $x^2(x^2-27) = 0$

  $x_1 = 0$ или $x^2 - 27 = 0$

  $x^2 = 27$

  $x_2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

  $x_3 = -3\sqrt{3}$



$$y_{\max} = y(-3\sqrt{3}) = -\frac{(-3\sqrt{3})^3}{9-(-3\sqrt{3})^2} = -\frac{-81\sqrt{3}}{9-27} = -\frac{81\sqrt{3}}{18}$$

$$y_{\min} = y(3\sqrt{3}) = -\frac{(3\sqrt{3})^3}{9-(3\sqrt{3})^2} = -\frac{81\sqrt{3}}{-18} = \frac{81\sqrt{3}}{18}$$

- $$y'' = \frac{(x^4-27x^2)'(x^4-18x^2+81)-(x^4-27x^2)(x^4-18x^2+81)'}{(x^4-18x^2+81)^2} =$$

$$= \frac{(4x^3-54x)(x^4-18x^2+81)-(x^4-27x^2)(4x^3-36x)}{(x^4-18x^2+81)^2} =$$

$$= \frac{4x^7-72x^5+324x^3-54x^5+972x^3-4374x-4x^7+36x^5+108x^5-972x^3}{(x^4-18x^2+81)^2} =$$

$$= \frac{18x^5+324x^3-4374x}{(x^4-18x^2+81)^2}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{18x^5+324x^3-4374x}{(x^4-18x^2+81)^2}=0$$

Дробь в том случае равна нулю, если её числитель равен нулю:

$18x^5+324x^3-4374x=0/:18*$

$x(x^4+18x^2-243)=0$

$x_1=0$

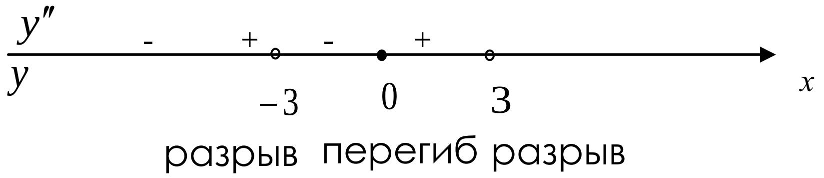
$x^4+18x^2-243=0$

Пусть $x^2=t$; $t\ge 0$, тогда $t^2+18t-243=0$

D =324 - 4*(-243) = 1296

$$t_1=\frac{-18+36}{2}=9$$

$$t_2=\frac{-18-36}{2}=-27-\textit{не удовлетворяет\_условию}$$



y (0) = 0

- а) $$\lim_{x\to\infty} -\frac{x^3}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{9}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\frac{9}{x^3}-\frac{1}{x}} =$$

$$= -\frac{1}{б.м.} = -\infty$$

горизонтальной асимптоты нет

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3}{9-x^2}/x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^3}{9x-x^3} =$$

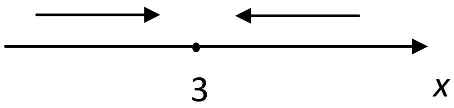
- б) $$\lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{9x}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = -\frac{1}{\frac{9}{x^2}-1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3}{9-x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3-9x+x^3}{9-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{9x}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = -\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1} = 0$$

y = kx - b = x - наклонная асимптота

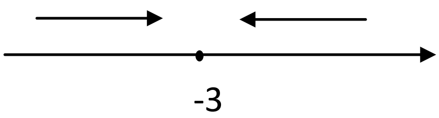
- в) $$\lim_{x\to 3+0} -\frac{x^3}{9-x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3-0} -\frac{x^3}{9-x^2} = -\infty$$



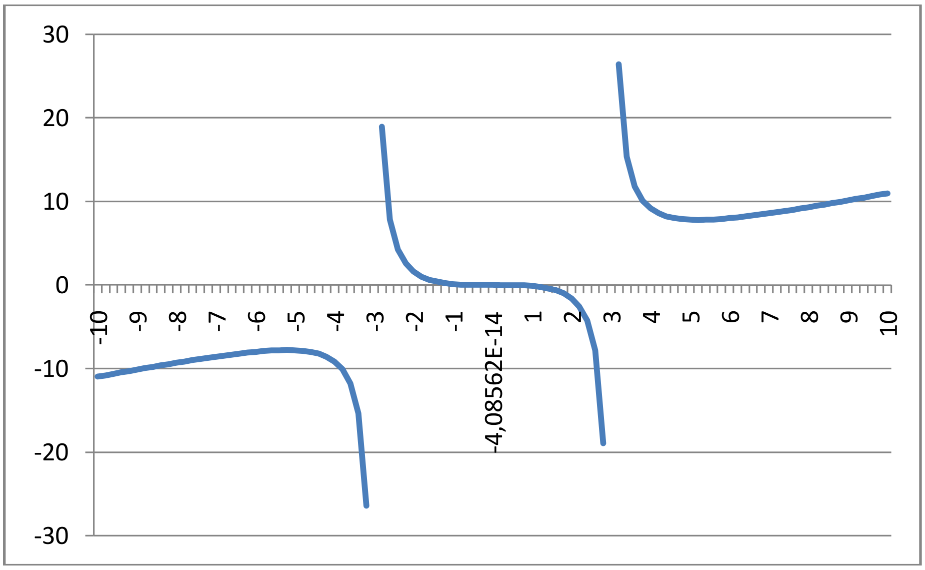
x = 3,1   y = 48,837705   x = 2,9   y = -41,337288
x = 3,01   y = 453,75875   x = 2,99   y = -446,25875
3   ∞ 3 $-\infty$

x = 3 - вертикальная асимптота

$$\lim_{x\to -3+0} -\frac{x^3}{9-x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to -3-0} -\frac{x^3}{9-x^2} = -\infty$$



x = -3 - вертикальная асимптота



Задание:

Вариант	Задание
1	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$
2	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{5x^3}{4-x^2}$
3	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x^3}{9-x^2}$
4	Исследовать функцию и построить ее график: $y=-\frac{7x^3}{9-x^2}$
5	Исследовать функцию и построить ее график: $y=-\frac{2x^3}{4-x^2}$
6	Исследовать функцию и построить ее график: $y=-\frac{5x^3}{4-x^2}$
7	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x^3}{25-x^2}$
8	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{3x^3}{9-x^2}$
9	Исследовать функцию и построить ее график: $y=-\frac{3x^3}{4-x^2}$
10	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{3x^3}{x^2-4}$
11	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{5x^3}{x^2-9}$
12	Исследовать функцию и построить ее график: $y=-\frac{5x^3}{x^2-9}$
13	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{7x^3}{9-x^2}$
14	Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{3x^3}{9-x^2}$

15	Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{4x^3}{4 - x^2}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены исследования функции с помощью производной, построения ее графика

Контрольные вопросы:

- Применение производной к исследованию функции
- Построение графика

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10
Метод интегрирования заменой переменной

Цель: получить навыки вычисления неопределенного интеграла заменой переменной

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 4a $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

8 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

9 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

ПРИМЕРЫ: а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7\right)dx = \int\left(x^5 + 4\cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7\right)dx = \int x^5 dx + 4\int x^{-3}dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx - 7\int dx =$$

$$= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C;$$

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{aligned} &t = 1 + 2x; \\ &dt = 2dx; \\ &dx = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

в) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx=\left|\begin{matrix}t=x^5\\ dt=5x^4dx\\ x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x^5+C;$$

г) $\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{matrix}t=2-7x,\\ dt=-7dx,\\ dx=-\frac{1}{7}dt\end{matrix}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^t dt=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix}t=\operatorname{arctg} x\\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{matrix}\right|=\int tdt=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C;$$

е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx=\left|\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{matrix}\right|=\int\sin tdt=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$$=-\cos t+C=-\cos e^x+C;$$

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx=\left|\begin{matrix}t=x^2\\ dt=2xdx\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C;$$

з) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=e^x,\\ dt=e^x dx,\\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$$=\ln\left|\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+t\right|+C=\ln\left|\sqrt{e^{2x}-7}+e^x\right|+C;$$

и) $$\int\frac{\sin 5x\,dx}{9-\cos^2 5x}=\left|\begin{array}{l} t=\cos 5x\\ dt=-5\sin 5x\,dx\\ \sin 5x\,dx=-\frac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C;$$

к) $$\int x\cdot \mathrm{tg}x^2dx=\int\frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\cos x^2\\ dt=-2x\sin x^2dx\\ x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right|+C;$$

л) $$\int\frac{3^x}{9^x+4}dx=\int\frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=3^x\\ dt=3^x\ln 3dx\\ 3^x dx=\frac{1}{\ln 3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2\ln 3}\mathrm{arctg}\frac{3^x}{2}+C;$$

Задание:

Вариант	Задание
1	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^5 - \frac{2}{x^3} + 3\sqrt{x} - 4)dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ в) $\int \frac{3\cos x dx}{\sqrt[3]{1+2\sin x}}$ г) $\int \frac{3xdx}{5+x^2}$ д) $\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2}dx$; е) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5}$;
2	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^6 - \frac{2}{x^5} + 4\sqrt{x} - 4)dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ в) $\int \frac{6\cos x dx}{\sqrt[5]{1+2\sin x}}$ г) $\int \frac{4xdx}{5+3x^2}$ д) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$; е) $\int \sin 5x\,dx$;
3	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^5 - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt{x} - \frac{5}{x})dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$ в) $\int \frac{3\cos x dx}{\sqrt[8]{2\sin x - 6}}$ г) $\int \frac{3xdx}{\sqrt{5+x^2}}$ д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;
4	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^8 - \frac{9}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x})dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$ в) $\int \frac{6\sin x dx}{\sqrt[5]{1+2\cos x}}$ г) $\int \frac{3x^2dx}{\sin^2(5+x^3)}$ д) $\int \sin 2x\,dx$; е) $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$;
5	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (8x^5 - \frac{5}{\sqrt{x^5}} + 3\sqrt{x} - 12)dx$ б) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$ в) $\int \sin^5 x \cos x dx$ г) $\int \frac{3xdx}{5+x^2}$ д) $\int (1-\sin 3x)dx$; е) $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$;
6	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (6x^5 - \frac{3}{x^6} + \frac{4}{\sqrt[6]{x}} - 4x^3)dx$ б) $\int \frac{dx}{1+16x^2}$ в) $\int \frac{5x^4dx}{7+x^5}$ г) $\int \frac{3\sin x dx}{5+\cos x}$ д) $\int \frac{e^x}{\sin e^x}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

7	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)dx$ б) $\int \cos^3 x \sin x dx$ в) $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ г) $\int \frac{dx}{1-25x^2}$ д) $\int \sin\frac{x}{5}dx;$ е) $\int \frac{x}{4x^2-3}dx;$
8	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^4 - 5\sqrt[3]{x^2} + 3)dx$ б) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$ в) $\int (4x+5)^7 dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ д) $\int x\cos 2x^2\, dx;$ е) $\int xe^{x^2-3}dx;$
9	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^2 - \frac{3}{x^4} + 2)dx$ б) $\int \frac{5dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ в) $\int (6x-1)^3 dx$ г) $\int \frac{3dx}{4x+5}$ д) $\int \frac{x^2}{1+2x^3}dx;$ е) $\int e^{-x^3}x^2 dx;$
10	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (x^4 - 4\sqrt[3]{x^2} + 1)dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$ в) $\int (7x-1)^5 dx$ г) $\int e^{3x+1}$ д) $\int e^x \sin e^x dx;$ е) $\int \cos 3x dx;$
11	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (6x^5 - \frac{2}{x^3} + 1)dx$ б) $\int \frac{1dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$ в) $\int \sin^5 x \cos x dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ д) $\int \frac{x^4}{1+5x^5}dx$ е) $\int \cos 5x \cdot dx$
12	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (3x - \frac{5}{2\sqrt[3]{x}} + 7)dx$ б) $\int \frac{5xdx}{3x^2+5}$ в) $\int \sin(5-3x)dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}}$ д) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$ е) $\int \frac{x^2}{1+4x^3}dx$
13	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (8x^2 - \frac{7}{3\sqrt{x}} + 3)dx$ б) $\int \frac{7dx}{9x^2+1}$ в) $\int \frac{7}{\sin^2 5x}dx$ г) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$ д) $\int \frac{dx}{2+x}$ е) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$

14	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (9x - \frac{5}{x^2} - 4)dx$ б) $\int \frac{5dx}{\cos^2 3x}$ в) $\int \frac{7}{(2x+3)^4}dx$ г) $\int \frac{2dx}{1+25x^2}$ д) $\int \sin(4-x)\,dx$ е) $\int e^{5x+1}dx$
15	Вычислить неопределенные интегралы: а) $\int (\frac{2}{x^4} - \frac{7}{\sqrt[4]{x}} + 3)dx$ б) $\int \frac{3dx}{(5x-1)^4}$ в) $\int 4^{2x+3}dx$ г) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$ д) $\int \sin(5-3x)\,dx$ е) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки вычисления интеграла методом замены переменной

Контрольные вопросы:

- Метод замены переменной

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11
Метод интегрирования по частям

<u>Цель:</u> получить навыки вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>

$$\int U\cdot V'dx = U\cdot V-\int U'\cdot Vdx$$

Пример: $\int x^2\cos xdx=\begin{vmatrix} U=x^2; & U'=2x\\ V'=\cos x; & V=\sin x\end{vmatrix}=x^2\sin x-\int 2x\cdot\sin xdx=$

$=\begin{vmatrix} U=2x; & U'=2\\ V'=\sin x; & V=-\cos x\end{vmatrix}==x^2\cdot\sin x-\left(2x\cdot(-\cos x)-\int 2\cdot(-\cos x)dx\right)=$

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C;$

Пример: $\int\arccos x\,dx=\begin{vmatrix} U=\arccos x; & U'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\\ V'=1; & V=x\end{vmatrix}=x\cdot\arccos x-\int x\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{vmatrix} t=1-x^2\\ dt=-2xdx\\ -xdx=\dfrac{1}{2}dt\end{vmatrix}=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=\sqrt{1-x^2}+C$$

в итоге получаем $\int\arccos x\,dx=x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C;$

Пример: $\int x^2\ell^{3x}dx=\left\|\begin{matrix} x^2=U & \ell^{3x}dx=dV\\ 2xdx=dU & \dfrac{1}{3}\ell^{3x}=V\end{matrix}\right\|=x^2*\dfrac{1}{3}\ell^{3x}-\int\dfrac{1}{3}\ell^{3x}*2xdx=$

$=\dfrac{1}{3}x^2*\ell^{3x}-\dfrac{2}{3}\int\ell^{3x}xdx=$

$=\left\|\begin{matrix} x=U & \ell^{3x}dx=dV\\ dx=dU & \dfrac{1}{3}\ell^{3x}=V\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{3}x^2*\ell^{3x}-\dfrac{2}{3}(x*\dfrac{1}{3}\ell^{3x}-\int\dfrac{1}{3}\ell^{3x}dx)=$

$$=\frac{1}{3}x^2\ell^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\ell^{3x}-\frac{1}{3}\ell^{3x}+c=\frac{1}{3}(x^2\ell^{3x}-2x-\frac{2}{3}\ell^{3x}-\ell^{3x})+c$$

Задание:

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям

Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
1.	$\int x\cos xdx$	$\int xe^{-2x}\,dx;$	$\int x^2\ln x\,dx;$
2.	$\int x\sin xdx$	$\int (x+3)e^{2x}dx;$	$\int x\arccos x\,dx;$
3.	$\int (4x+5)\ln xdx$	$\int xe^{x}dx;$	$\int x\arcsin 5x\,dx;$
4.	$\int x^2e^{3x}dx$	$\int (x+2)\cos 5x\,dx;$	$\int \arcsin 4x\,dx;$
5.	$\int (2x+3)\ln xdx$	$\int (x+5)e^{2x}dx;$	$\int x^7\ln x\,dx;$
6.	$\int e^x\cos xdx$	$\int x\cos 2x\,dx;$	$\int 3x^2\ln(x+2)dx;$
7.	$\int (4x-3)e^x dx$	$\int x\sin 3x\,dx;$	$\int x\cdot arctgx\,dx;$
8.	$\int 5x\cos xdx$	$\int e^{2x}\cos xdx;$	$\int arctg 3x\,dx;$
9.	$\int 2x^3\ln xdx$	$\int (1-x^2)\sin 3x\,dx;$	$\int e^{-2x}(2x+5)dx;$
10.	$\int 3xe^x dx$	$\int e^{-2x}\cdot x\cdot dx$	$\int (x-3)\cdot\cos 3x\,dx$
11.	$\int (2x^3-5)\ln xdx$	$\int (x+1)\cdot\cos 2x\,dx$	$\int e^{-5x}\cdot x\cdot dx$
12.	$\int (3x^2-5)\ln xdx$	$\int (x^2+1)\cdot\ln x\,dx$	$\int (x+5)\cdot e^x\,dx$
13.	$\int (4x+7)e^x dx$	$\int (x+1)\cdot\ln x\,dx$	$\int x\cdot\cos 2x\,dx$
14.	$\int (5x-2)e^x dx$	$\int (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$	$\int (x+1)^2\cdot\ln x\,dx$
15.	$\int (7x^2-3)\ln xdx$	$\int (x-1)\cdot\ln x\,dx$	$\int x\cos 6xdx$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки вычисления интеграла методом интегрирования по частям

Контрольные вопросы:

- Метод интегрирования по частям

Литература:

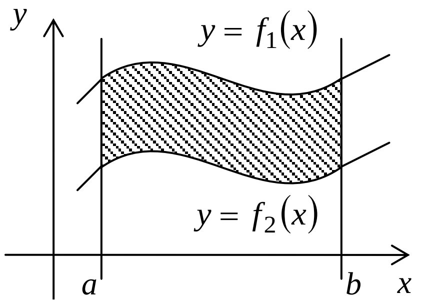
- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дададян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12
Площадь плоской фигуры

Цель: получить навыки вычисления площади плоской фигуры

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

- Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$



Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

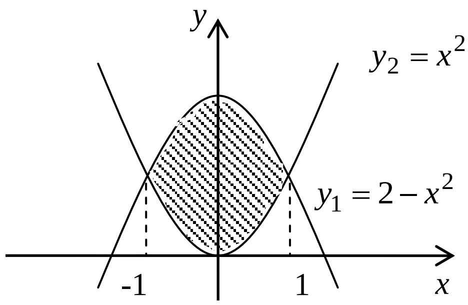
Решение: Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$x_1 = -1;\quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1;\quad b = 1.$

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\left(2 - x^2\right) - x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3};$$



Пример: Найти площадь фигуры ограниченной линиями

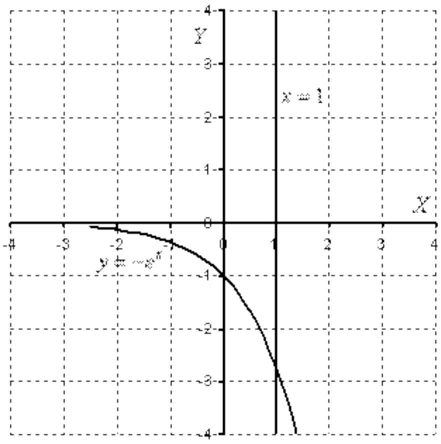
$y = x^2 - x - 6$

$$S = \left|\int_{-2}^{3}(x^2 - x - 6)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right|_{-2}^{3} = \left|(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18) - (-\frac{8}{3} - 2 + 12)\right| =$$

$$= \left|-\frac{125}{6}\right| = \frac{125}{6} \text{ кв.ед}$$

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -e^x$, $x = 1$ и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:



Если криволинейная трапеция расположена **под осью** OX (или, по крайней мере, *не выше* данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S = -\int_a^b f(x)dx$

В данном случае:

$$S = -\int_0^1 (-e^x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Ответ: $S = (e-1)$ $ед^2 \approx 1{,}72$ $ед^2$

Пример: Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$. Для этого решаем уравнение:

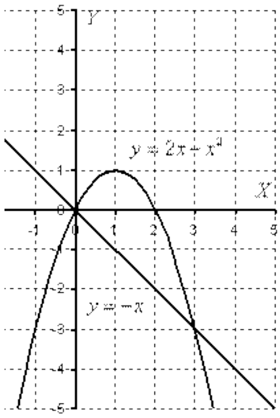
$2x - x^2 = -x$

$3x - x^2 = 0$

$x(3 - x) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$.



Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ **больше либо равна** некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x=a$, $x=b$, можно найти по формуле: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, и, грубо говоря, **важно, какой график ВЫШЕ** (относительно другого графика), **а какой – НИЖЕ**.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x-x^2$ необходимо вычесть $-x$

Искомая фигура ограничена параболой $y=2x-x^2$ сверху и прямой $y=-x$ снизу.

На отрезке $[0;3]$ $2x-x^2\geq -x$, по соответствующей формуле:

$$S=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S=4\frac{1}{2}$ $ед^2$

<u>Задание:</u>

Вариант	Задание
1	1) Найти площадь фигуры, ограниченной параболами: $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=x^2-3x-4$ y=0 x=5
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-1}^{3}(1-2x+3x^2)dx$ б) $\int_0^4 \frac{5dx}{\sqrt{x}}$
2	1) Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y=4-x^2$ и осью Ox
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=9-x^2$ x = - 1 x = 2
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_1^2(3-4x+x^3)dx$ б) $\int_0^9 \frac{3dx}{\sqrt{x^3}}$
3	1) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-5$, осью Ox и осью Oy $(y<0)$;
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=x^2-4x+6$ y = 2 x = 4

	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-1}^{2}\left(5+2x+3x^2\right)dx$ б) $\int_{0}^{4}\frac{2dx}{\sqrt{x^3}}$
4	1) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-4$ и прямыми $y=0$, $x=-1$ $(x\geq-1)$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=3-2x-x^2$ y = 1 – x
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{0}^{3}\left(7-3x+4x^2\right)dx$ б) $\int_{0}^{4}\frac{3dx}{\sqrt{x^3}}$
5	1) Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=9$, осью OX и прямыми $x=3$ и $x=6$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=\frac{1}{3}x^2+1$ и осью Ox x = 1 x = 5
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{1}^{4}\left(4x-5x^4\right)dx$ б) $\int_{-1}^{2}\frac{3dx}{x^4}$
6	1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$ и осью Oy
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=x^2-x-6$ и осью Ox
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{1}^{3}(7-3x)^3dx$ б) $\int_{1}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
7	1) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=x^2$ y = 2x
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{0}^{3}\left(4x-7x^6\right)dx$ б) $\int_{0}^{8}\frac{5dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
8	1) Найти площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2=4x$ и $x^2=4y$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=-x^2+6x$ и осью Ox
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{1}^{3}\left(6x-2x^3\right)dx$ б) $\int_{0}^{8}\frac{3dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

9	1) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$ и $y=0$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=\frac{1}{3}x^3$ и осью Ох x = -3 x = 3
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_1^2 (3x^2-5x)dx$ б) $\int_1^8 \frac{3dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
10	1) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x+5$, $y=\frac{x^2}{6}$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=-x^2+4$ y = 0
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-2}^3 (5x^4-4x+1)dx$ б) $\int_1^{27} \frac{5dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$
11	1) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\frac{2}{x}$, $y=5\cdot e^x$, $y=2$, $y=5$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=x^2-2x+2$ x = 1 x = 2 y = 0
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-1}^3 (4x^3-5x+2)dx$ б) $\int_1^2 \frac{4dx}{x^7}$
12	1) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\cos x$, $y=\sin x$, $x=0$, $(x\ge 0)$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=\frac{1}{x}$ x = 1 x = 3 y = 0
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_2^3 (4x^3-5x+1)dx$ б) $\int_{-1}^2 \frac{3dx}{x^5}$
13	1) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=16$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y=-x^2-1$ y = 0 x = 1 x = 4
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_1^2 (3x-5x^2+2)dx$ б) $\int_1^3 \frac{dx}{4x^4}$

14	1) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2 - 4x + 3,\qquad y = -x^2 + 2x + 3$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $x - y - 1 = 0$ x = 1 x = 2 y = 0
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-1}^{2}(7x^6 - 5x + 2)dx$ б) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{5x^7}$
15	1) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = -4x,\qquad y = 32 - x^2$
	2) Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $x - 2y + 4 = 0$ $3x + 2y - 12 = 0$ y = 0
	3) Вычислить определенные интегралы: а) $\int_{-2}^{1}(4x^3 - 7x^2 + 3)dx$ б) $\int_{1}^{8}\frac{3dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения площади плоской фигуры

Контрольные вопросы:

- Формула Ньютона-Лейбница
- Площадь плоской фигуры

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13
Применение определенного интеграла к решению физических задач

Цель: получить навыки решения физических задач с помощью определенного интеграла

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Пример: Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение: Так как путь, пройденный телом со скоростью $\upsilon(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dy,$$

то имеем:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)\Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

Задание:

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1.	Решить задачу: Скорость движения тела задана уравнением $V = (6t^2 + 4)$ м/с. Найдите его путь, пройденный за 5с от начала движения.
2.	Решить задачу: Скорость движения тела задана уравнением $V = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найдите его путь за четвертую секунду.
3.	Решить задачу: Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $V = (39{,}2 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подьема тела.
4.	Решить задачу: Скорость падающего в пустоте тела определяется по формуле $V = (9{,}8t)$ м/с. Какой путь пройдет тело за первые 20с падения?
5.	Решить задачу: Скорость прямолинейного движения тела определяется по формуле $V = (3t^2 - 2t + 1)$ м/с. Какой путь пройдет тело за 5с от начала движения?
6.	Решить задачу: Скорость прямолинейного движения тела определяется по формуле $V = (4t^3 + 3t^2 + 2)$ м/с. Определите путь, пройденный телом за 4 секунду.
7.	Решить задачу: Два тела начинают движение одновременно из одной и той же точки со скоростью $V = (2t^3)$ м/с и $V = (3t^2 + 8)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с, если они движутся в одном направлении и по одной прямой?
8.	Решить задачу: Найдите путь, пройденный по прямой телом от начала движения до остановки, если скорость его определяется по формуле $V = (6t - 2t^2)$ м/с.
9.	ешить задачу: Камень брошен с земли вертикально вверх. Найдите наибольшую высоту подъема камня, если его скорость $V = (98 - 9{,}8t)$ м/с.
10.	Решить задачу: Скорость движения точки выражается формулой $V = (18t - 3t^2)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

11.	Решить задачу: Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону $V=\left(15t-5t^2\right)$ м/с.
12.	Решить задачу: Тело брошено вертикально вверх со скоростью $V=\left(49-9{,}8t\right)$ м/с. Найти наибольшую высоту его подъема.
13.	Решить задачу: Тело движется прямолинейно со скоростью $V(t)=(2t+a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=2$ с тело прошло путь 40 м.
14.	Решить задачу: Тело движется прямолинейно со скоростью $V(t)=(4t+a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с от начала движения, равен 48 м.
15.	Решить задачу: Два тела одновременно выходят из одной точки со скоростью $V_1=5t$ м/с и $V_2=3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 с, если они движутся в одном направлении и по одной прямой?

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки решения физических задач с помощью определенного интеграла

Контрольные вопросы:

- Решение физических задач

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Цель: получить навыки решения ДУ с разделяющимися переменными

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка вида $\boxed{y' = f(x)}$**.**

Дифференциальное уравнение *первого порядка* в общем случае **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

Решение: $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители .В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы». Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) тоже целесообразно записать под логарифмом*.

То есть, **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Используем свойство логарифмов $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

*Ответ***:** общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

Пример: Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

*Решение***:** по условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.
Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$$y = e^{-2x+C^*}$$

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$$y = Ce^{-2x}$$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Это тоже просто.
В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1$$

То есть, $C = 2$
Стандартная версия оформления:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:
$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.
Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Пример: Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.
Решение: Попытаемся разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$, разнесем слагаемые:
$y(x+1)dx = -x(y+1)dy$; выражая $\dfrac{dy}{dx}$ из полученного уравнения убедимся в том, что

$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным: $\int \left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -\int \left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Получим $\ln|x| + x = -\ln|y| - y + \ln C$, $\Rightarrow \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y} = C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y} = C$.

<u>Задание:</u>

Вариант	Задание 1. Решить дифференциальное уравнение	Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям
1.	$2xy' = 3y$	$2xy' = 3y^2$. y(0)=3
2.	$cos^2y' = 3y$	$2xy' = 3y^2$, y(1)=2
3.	$2x^2y' = 3y$	$2xy' = 3y$, y(0)=3
4.	$2xy' = 3y^2$	$y' = 3y$, y(0)=3
5.	$2xy' = 3sin^2y$	$y' = \frac{7}{y}$, y(0)=3
6.	$y' = 3y$	$2y' = 3e^x$, y(-1)=5
7.	$y' = 3cosx$	$2xy' = 3y$, y(1)=2
8.	$2y' = 3sinx$	$y' = \frac{7}{y}$, y(1)=2
9.	$2^yy' = 3x$	$y' = \frac{7}{y}$, y(0)=3
10.	$2y' = 3e^x$	$2xy' = 3y$, y(-1)=5
11.	$2x^2y' = \frac{5}{y}$	$2y' = 3e^x$, y(2)=0
12.	$2y' = \frac{5}{y^2}$	$2xy' = 3y^2$, y(-1)=5
13.	$x^2y' = \frac{5}{cosy}$	$y' = 3y$,y(1)=2
14.	$y' = \frac{7}{y}$	$2xy' = 3y$, y(2)=0
15.	$4y' = \frac{5}{siny}$	$2xy' = 3y^2$,y(2)=0

<u>Вывод:</u>

В ходе выполнения практической работы были получены навыки решения ДУ с разделяющимися переменными

<u>Контрольные вопросы:</u>

- Дифференциальные уравнения, их виды и методы решения

- Задача Коши

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15
Однородные дифференциальные уравнения

Цель: получить навыки решения однородных дифференциальных уравнениях

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Для того, чтобы распознать однородное дифференциальное уравнение, нужно ввести постоянную t и сделать замену y → ty, x → tx. Если, в результате такого преобразования, постоянная t сократится, то это **однородное дифференциальное уравнение**. Производная y′ при таком преобразовании не меняется:

$$y'=\frac{dy}{dx}\rightarrow\frac{dty}{dtx}=\frac{tdy}{tdx}=\frac{dy}{dx}$$

$$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

Пример:

Делаем замену y → ty, x → tx:

$$tyd\left(tx\right)+\left(2\sqrt{txty}-tx\right)d\left(ty\right)=t^2ydx+\left(2\sqrt{t^2xy}-tx\right)tdy=$$

$$t^2ydx+t\left(2t\sqrt{xy}-tx\right)dy=t^2ydx+t^2\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

, или

$$t^2ydx+t^2\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

. Сокращаем на t^2:

$$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

Уравнение не содержит t - значит это однородное уравнение.

Решение однородного дифференциального уравнения

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

y = zx,

где z - функция от x. Действительно,

y′ = (zx)′ = z′x + z(x)′ = z′x + z

Подставляем в исходное уравнение:

$$y'=z'x+z=f\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{zx}{x}\right)=f\left(z\right)$$

, или

$$xz'+z=f\left(z\right)$$

, или

$$x\frac{dz}{dx}=f\left(z\right)-z$$

Разделяем переменные. Умножим на dx и разделим на x(f(z) - z). При f(z) - z ≠ 0 и x ≠ 0 получаем:

$$\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\int\frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+C$$

И мы получили общий интеграл уравнения:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\ln\left|x\right|+C$$

Постоянную интегрирования C часто бывает удобно записать в виде lnC, тогда

$$\ln\left|x\right|+lnC=\ln\left(Cx\right)$$

Знак модуля можно опустить, поскольку нужный знак определяется выбором знака постоянной C. Тогда общий интеграл примет вид:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\ln\left(Cx\right)$$

Далее следует рассмотреть корни уравнения:
f(z) - z = 0 и решение x = 0 (если есть смысл).

Пример решения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Пример $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$

Решение.

Проверим, является ли данное уравнение однородным. Делаем замену: y → ty, x → tx. При этом y′ → y′.

$$xy'=y+\sqrt{y^2-x^2} \quad\rightarrow\quad txy' = ty+\sqrt{\left(ty\right)^2-\left(tx\right)^2}$$, или

$$txy'=ty+\sqrt{t^2\left(y^2-x^2\right)},$$

или

$$txy'=ty+t\sqrt{y^2-x^2}.$$

Сокращаем на t:

$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

Постоянная t полностью сократилась. Поэтому уравнение является однородным.
Делаем замену: y = zx.
y′ = (zx)′ = z′x + z(x)′ = z′x + z
Подставляем в исходное уравнение:

$$x\left(z'x + z\right) = zx + \sqrt{\left(zx\right)^2 - x^2},$$

сокращаем на x:

$$z'x + z = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

или

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{z^2 - 1}$$

Умножим на dx и разделим на $x\sqrt{z^2-1}$. При $z^2 - 1 \neq 0$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C \qquad (1)$$

Оставшийся интеграл табличный:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \ln\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right|$$

Получаем:

$$\ln\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right| = \ln|x| + \ln C$$

Потенцируем:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = Cx$$

Заменим $z = \frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx.$$

Умножим на x:

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2,$$

или

$\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2-y$.

Возводим в квадрат:

$$y^2-x^2=\left(Cx^2-y\right)^2=\left(Cx^2\right)^2-2Cx^2y+y^2$$,

преобразуем

$$y^2-x^2=C^2x^4-2Cx^2y+y^2$$

$$2Cx^2y=C^2x^4+x^2$$.

Разделим на x:

$$2Cy=C^2x^2+1 \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $z^2 - 1 = 0$, или

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-1=0$$

Корни этого уравнения:

$y = x$ и $y = -x$

являются решениями исходного уравнения и не входят в решение (2). Поэтому к общему интегралу (2) добавим решения $y = x$ и $y = -x$.

Ответ: $2Cy=C^2x^2+1; \quad y=x; \quad y=-x$

<u>Задание:</u>

1. Проверить уравнение на однородность и найти его общий интеграл. Выполнить проверку. $(x+y)y'+y=0$
2. Решить дифференциальное уравнение $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$
3. Выполнить проверку на однородность и решить дифференциальное уравнение $y^2+x^2y'=xyy'$
4. Решить дифференциальное уравнение $(2\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0$
5. Решить дифференциальное уравнение $$4y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+5$$

<u>Вывод:</u>

В ходе выполнения практической работы были получены навыки решения однородных дифференциальных уравнений

<u>Контрольные вопросы:</u>

- Виды ДУ

<u>Литература:</u>

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16
Тригонометрическая форма комплексного числа

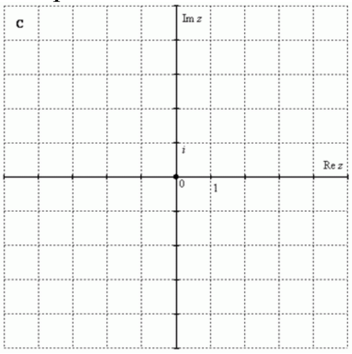
Цель: получить навыки получения тригонометрической формы комплексного числа, действий над комплексными числами в тригонометрической форме

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Комплексным числом z называется число вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* ($\operatorname{Re} z$) комплексного числа z, число b называется *мнимой частью* ($\operatorname{Im} z$) комплексного числа z.

$a+bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z=bi+a$ или переставить мнимую единицу: $z=a+ib$ – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: $z=a+bi$

Чтобы всё было понятнее, сразу приведу геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:



Как упоминалось выше, буквой $\mathbf{R}$ принято обозначать множество действительных чисел. **Множество** же **комплексных чисел** принято обозначать буквой $\mathbf{C}$. Поэтому на чертеже следует поставить букву $\mathbf{C}$, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость.

Комплексная плоскость состоит из двух осей:

$\operatorname{Re} z$ – действительная ось

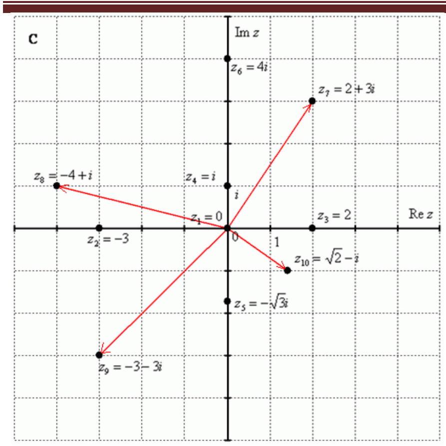
$\operatorname{Im} z$ – мнимая ось

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1=0$, $z_2=-3$, $z_3=2$

$z_4=i$, $z_5=-\sqrt{3}i$, $z_6=4i$

$z_7=2+3i$, $z_8=-4+i$, $z_9=-3-3i$, $z_{10}=\sqrt{2}-i$



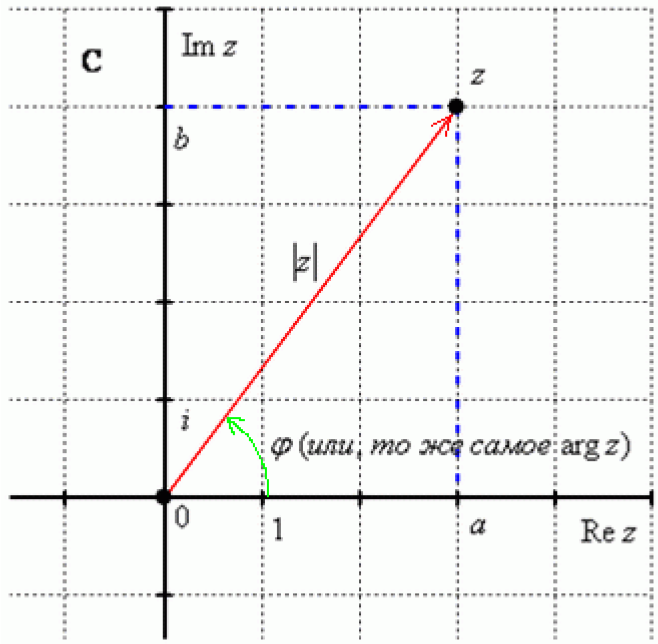
По какому принципу отмечены числа на комплексной плоскости.

Алгебраическая форма комплексного числа. $z = a + bi$

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме:

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**. Не разбегаемся, всё проще, чем кажется.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0, b > 0$:



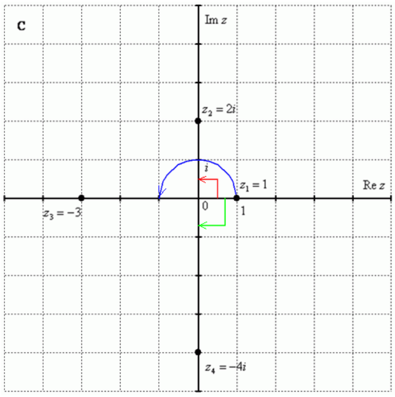
Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа z называется **угол** φ между положительной полуосью действительной оси $\operatorname{Re} z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Пример: _Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$.
Выполним чертёж:



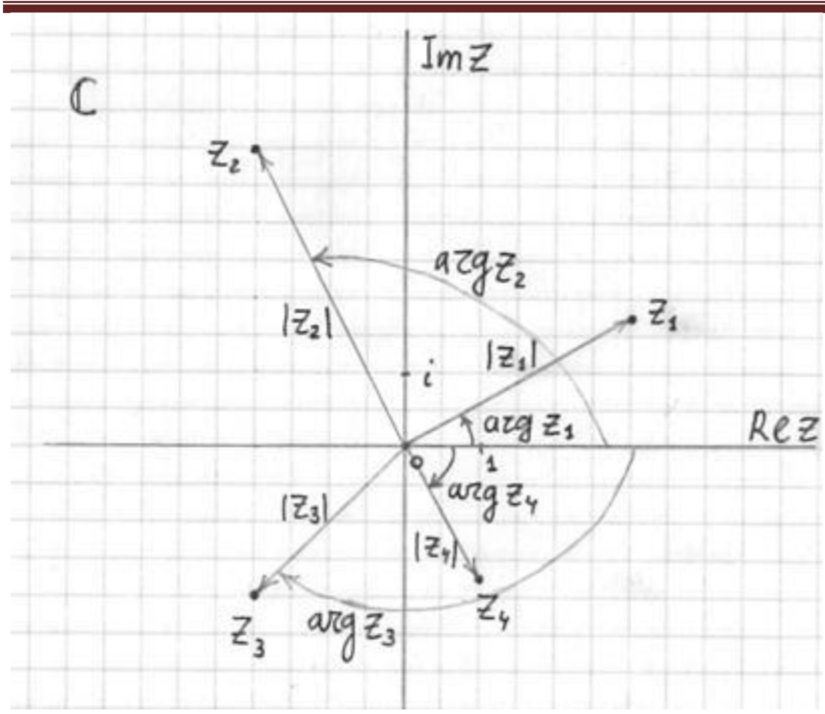
1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент.
Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.
Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$.
Ясно и обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле:
$|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.

Очевидно, что $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом.

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):
$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$

3) Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_2 = -2 + 4i$, ,
$z_4 = 1 - \sqrt{3}i$.



Представим в тригонометрической форме число $z_2 = -2 + 4i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Поскольку $a < 0, b > 0$ (случай 2), то

$$\arg z_2 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{4}{-2} = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg2$$

– вот здесь нечетностью арктангенса воспользоваться нужно. К сожалению, в таблице отсутствует значение $arctg2$, поэтому в подобных случаях аргумент приходится оставлять в громоздком виде:

$z_2 = 2\sqrt{5}(\cos(\pi - arctg2) + i\sin(\pi - arctg2))$ – число z_2 в тригонометрической форме.

Представим в тригонометрической форме число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_4| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то $\arg z_4 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ (минус 60 градусов).

Таким образом:

$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – число z_4 в тригонометрической форме.

<u>Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:</u>

$Z_1 = r_1(\cos f_1 + i\sin f_1)$

$Z_2 = r_2(\cos f_2 + i\sin f_2)$

$Z_1 * Z_2 = r_1(\cos f_1 + i\sin f_1) * r_2(\cos f_2 + i\sin f_2) = r_1 * r_2[(\cos f_1 * \cos f_2 - \sin f_1 * \sin f_2) + (\cos f_1 * \sin f_2 + \sin f_1 * \cos f_2)i] = r_1 * r_2[\cos(f_1 + f_2) + \sin(f_1 + f_2)i]$

$Z_1/Z_2 = [r_1(\cos f_1 + i\sin f_1)] / [r_2(\cos f_2 + i\sin f_2)] = (r_1/r_2) * [(\cos f_1 + i\sin f_1) * (\cos f_2 - i\sin f_2) / (\cos^2 f_2 + i\sin^2 f_2)] = (r_1/r_2) * [\cos(f_1 - f_2) + \sin(f_1 - f_2)i]$

$Z^n = r^n(\cos fn + i\sin fn)$

$Z^{1/n} = r^{1/n}[\cos((f + 2*pi*k)/n) + i\sin((f + 2*pi*k)/n)]$, k = 0, 1, ..., n-1

Пример: $z = 3 + \sqrt{3}i$, найти z^{20}.

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

Нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет 2π радиан или 360 градусов. Выясним сколько у нас оборотов в аргументе $\frac{10\pi}{3}$. Для удобства делаем дробь правильной: $\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi$, после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот: $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}$. Надеюсь всем понятно, что $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ – это один и тот же угол. Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

<u>Задание:</u>

Вариант	Записать комплексное число в показательной и тригонометрической формах:	Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
1.	$z_1=-1-\sqrt{3}i$	$\left(2(\cos 50° + i\cdot\sin 50°)\right)^5$; $\frac{3(\cos 340° + i\cdot\sin 340°)}{8(\cos 25° + i\cdot\sin 25°)}$
2.	$z_1=-i$	$5\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 1{,}1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)^6$;
3.	$z_1=8i$	$8(\cos 25° + i\cdot\sin 25°)\cdot 0.5(\cos 95° + i\cdot\sin 95°)$; $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)^8$
4.	$z_1=\sqrt{3}+i$	$\frac{6(\cos 200° + i\cdot\sin 200°)}{0.5(\cos 140° + i\cdot\sin 140°)}$; $15\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\right)\cdot 0.1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

5.	$z_1=3$	$0{,}8(\cos 125^\circ + i\cdot\sin 125^\circ)\cdot 0.2(\cos 15^\circ + i\cdot\sin 15^\circ)$; $\dfrac{9\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}\right)}{3\left(\cos\dfrac{5\pi}{2}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{2}\right)}$
6.	$z_1=2i$	$(4(\cos 150^\circ + i\cdot\sin 150^\circ))^3$ $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 1.3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$
7.	$z_1=1+i$	$\dfrac{4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}$ $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{16}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{16}\right)\right)^4$
8.	$z_1=5i$	$\dfrac{2(\cos 175^\circ + i\cdot\sin 175^\circ)}{0.2(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ)}$; $\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{24}\right)\right)^6$
9.	$z_1=6i$	$4(\cos 85^\circ + i\cdot\sin 85^\circ)\cdot 1.3(\cos 65^\circ + i\cdot\sin 65^\circ)$ $\dfrac{6(\cos 315^\circ + i\cdot\sin 315^\circ)}{0.1(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ)}$
10.	$z_1=\sqrt{3}-i$	$7(\cos 115^\circ + i\cdot\sin 115^\circ)\cdot 0.3(\cos 65^\circ + i\cdot\sin 65^\circ)$ $\left(3\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right)^4$
11.	$z_1=-3i$	$\dfrac{0{,}6(\cos 245^\circ + i\cdot\sin 245^\circ)}{3(\cos 35^\circ + i\cdot\sin 35^\circ)}$ $\left(\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{34}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{34}\right)\right)^5$
12.	$z_1=-4$	$\dfrac{0{,}5(\cos 275^\circ + i\sin 275^\circ)}{0.1(\cos 15^\circ + i\cdot\sin 15^\circ)}$ $4\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\cdot 1.3\left(\cos\dfrac{3\pi}{5}+i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$
13.	$z_1=-1-i$	$2(\cos 165^\circ + i\cdot\sin 165^\circ)\cdot 3.7(\cos 15^\circ + i\cdot\sin 15^\circ)$ $\left(\sqrt{7}\left(\cos\dfrac{\pi}{14}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{14}\right)\right)^2$

14.	$z_1=6$	$\dfrac{0{,}4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)}$ $\dfrac{10(\cos 175^\circ+i\cdot\sin 175^\circ)}{2(\cos 115^\circ+i\cdot\sin 115^\circ)}$
15.	$z_1=1-i$	$5(\cos 305^\circ+i\cdot\sin 305^\circ)\cdot 1.4(\cos 25^\circ+i\cdot\sin 25^\circ)$ $15\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot 0.1\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки получения тригонометрической формы комплексного числа

Контрольные вопросы:

- Комплексные числа
- Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17
Смешанное произведение векторов

Цель: получить навыки вычисления смешанного произведения векторов

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле:
$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z,\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$

Векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y & b_y & b_z\end{vmatrix}, \text{где } \vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$$

Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\}$$

Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения $\Rightarrow$ объем
параллелипипеда, построенного на векторах как на ребрах равен:
$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\},$

Задание:

1. Даны координаты точек $A,B,C.$. Вычислить:
1) $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;
2) $\angle\left((\vec{AB}-\vec{CB}),\vec{AB}\right)$;
3) $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;
4) $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;
5) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$

Вариант	Координаты точек
1.	$A(-1;2;1),B(-1;3;-4),C(0;1;-2).$
2.	$A(0;1;2),B(3;-1;2),C(-1;2;5).$
3.	$A(0;2;3),B(3;1;2),C(1;5;1).$
4.	$A(1;0;3),B(1;4;1),C(0;2;3).$

5.	$A(1;1;0),B(4;1;2),C(1;2;3).$
6.	$A(-1;4;2),B(5;2;3),C(0;1;2).$
7.	$A(3;-2;1),B(1;3;2),C(2;4;1).$
8.	$A(-1;3;-1),B(-3;2;3),C(-1;3;0).$
9.	$A(1;-1;6),B(4;5;-2),C(-1;3;0).$
10.	$A(7;1;2),B(-5;3;-2),C(3;2;5).$
11.	$A(-2;3;-2),B(2;-3;2),C(-1;3;0).$
12.	$A(4;2;-1),B(3;0;4),C(1;2;1).$
13.	$A(1;2;3),B(-1;2;-3),C(-2;3;1).$
14.	$A(4;-5;2),B(1;-3;4),C(5;2;-4).$
15.	$A(4;4;9),B(7;10;2),C(2;8;4).$

2. Найти объем пирамиды ABCD , если точка D(2,3,1)

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки вычисления смешанного произведения и его применения

Контрольные вопросы:

- Скалярное произведение векторов
- Векторное произведение векторов
- Смешанное произведение векторов

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18
Уравнение прямой в пространстве

<u>**Цель:**</u> получить навыки нахождения уравнения прямой в пространстве

<u>**Методические рекомендации для выполнения практической работы:**</u>

Пример: Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$ и $M_2(3;1;2)$.

Решение: Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

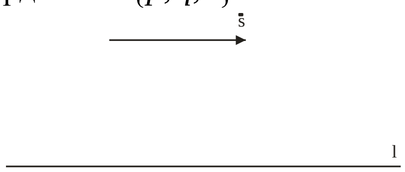
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1)$$

Так как $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$, то в силу (1) получим уравнения $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-3}{2-3}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

Пример: Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$.

Решение: Направляющий вектор $\bar{s}$ - это вектор, параллельный прямой.

Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор $\bar{s}$ имеет координаты $\{p;q;r\}$.



Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\bar{s}=\{2;3;-2\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\bar{s}=\{2;3;-2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

Пример: Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$.

Решение: Угол φ между двумя прямыми $l_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $l_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$ определяются равенствами $p_1 = 2$, $q_1 = -2$, $r_1 = 3$. Для прямой $\frac{x+5}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2 = 3$, $q_2 = -4$, $r_2 = 1$. Значит, $\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{6+8+3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$.

Пример: Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ параллельно прямой l_1: $\frac{x-5}{4} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{3}$.

Решение.

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.

В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-3}{p} = \frac{y-2}{q} = \frac{z+1}{r}$.

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (2)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять направляющий вектор $\bar{s}_1 = \{4;-2;3\}$ прямой l_1, т.е. в формуле (3.12) отношение $\frac{p}{4} = \frac{q}{-2} = \frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

Задание:

Вариант	Задание
1.	Даны точки A(1;2;3), B(-1;3;5), C(2;0;4), D(3;-1;2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
2.	Даны точки A(1;-2;3), B(2;0;5), C(-1;3;4), D(-2;1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 3) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
3.	Даны точки A(-3;2;1), B(0;-3;-1), C(2;0;-2), D(2;-1;5). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AD; 3) косинус угла между прямой AD и прямой $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 1 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$;
4.	Даны точки A(-2;0;3), B(-1;5;2), C(2;1;4), D(3;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
5.	Даны точки A(0;3;2), B(-1;2;-2), C(1;2;4), D(-1;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
6.	Даны точки A(2;2;-1), B(-3;1;0), C(1;2;1), D(2;0;-3). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
7.	Даны точки A(3;2;1), B(-1;0;-2), C(2;1;3), D(3;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AD; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно прямой AD
8.	Даны точки A(-3;-2;2), B(-1;-3;1), C(-2;0;1), D(1;-1;4). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) косинус угла между прямой AB и прямой $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -t + 10 \\ z = 2t - 5 \end{cases}$;
9.	Даны точки A(0;3;-1), B(-1;-2;5), C(1;0;-4), D(-3;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB;

	3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
10.	Даны точки A(-2;5;3), B(0;3;-1), C(2;2;4), D(3;1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
11.	Даны точки A(2;-3;-2), B(-1;3;0), C(-2;0;1), D(4;-1;3). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AD; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно прямой AD;
12.	Даны точки A(-3;1;-2), B(1;2;3), C(2;1;-3), D(0;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
13.	Даны точки A(-1;3;-1), B(2;0;5), C(2;3;4), D(5;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) косинус угла между прямой AB и прямой $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t - 7 \\ z = t + 5 \end{cases}$;
14.	Даны точки A(3;-2;-1), B(0;3;2), C(1;-1;-2), D(3;2;-5). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AB; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB
15.	Даны точки A(2;1;-3), B(-1;-3;2), C(-2;1;1), D(3;0;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой AD; 3) канонические уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно прямой AD

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения уравнения в пространстве

Контрольные вопросы:

- Уравнение прямой на плоскости
- Уравнение прямой в простанстве

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19
Взаимное расположение прямой и плоскости

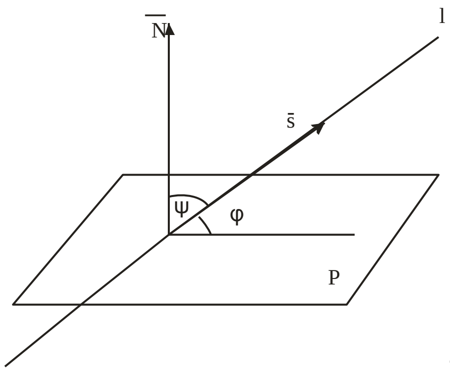
<u>Цель:</u> получить навыки решения задач на взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>

Пример: Найти угол между прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскостью P: $2x-y+3z-4=0$.

Решение: Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, где ψ - угол между направляющим вектором $\bar{s}$ прямой и нормальным вектором $\bar{N}$ плоскости.

`



с

Угол φ между прямой $l: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Для плоскости P: $2x-y+3z-4=0$ координаты нормального вектора $\bar{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=2$, $B=-1$, $C=3$. Для прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}=\{p;q;r\}$ - равенствами $p=5$, $q=3$, $r=-1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен $\sin\varphi=\frac{2\cdot5+(-1)\cdot3+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=$ $\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}=\frac{4}{\sqrt{490}}$. Следовательно, $\varphi=\arcsin\frac{4}{\sqrt{490}}$.

Пример: Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно прямой l: $\frac{x-3}{4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-0}{-2}$.

Решение: Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0. Получим: $A(x-1)+B(y+2)+C(z+3)=0$.

Условие перпендикулярности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\overline{s}=\{4{,}1{,}-2\}$ прямой l, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{A}{4}=\frac{B}{1}=\frac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4\cdot(x-1)+1\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z+3)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x+y-2z-8=0$.

Пример: Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$ перпендикулярно плоскости P: $x+4y-z=0$.

*Решение:*Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$.

Подставим в эти уравнения координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-5}{p}=\frac{y+3}{q}=\frac{z-2}{r}$

Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$.

Так как прямая l перпендикулярна плоскости P, то в качестве направляющего вектора $\overline{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор $\overline{N}=\{1;4;-1\}$ плоскости P, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{1}{p}=\frac{4}{q}=\frac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-1}$.

Пример: Найти координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости P: $x+2y-z+5=0$.

*Решение :*Координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$$

Запишем параметрические уравнения прямой $l:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ и подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости P: $(1+2t) + 2\cdot 3t - (-1+t) + 5 = 0$. Отсюда $7t + 7 = 0$; $t = -1$.

Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой $l:\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$.

Следовательно, $M_0(-1;-3;-2)$.

Задание:

Вариант	Задание
1.	Даны точки A(0;-3;2), B(1;2;-1), C(1;-2;4), D(1;1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) координаты точки пересечения прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ и плоскости ABC.
2.	Даны точки A(-2;2;1), B(-3;-1;0), C(1;-2;-3), D(2;0;3). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.
3.	Даны точки A(-2;2;5), B(-1;2;1), C(-3;3;1), D(-1;4;3). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.
4.	Даны точки A(-3;1;3), B(-4;2;-1), C(-2;1;-1), D(-2;3;1). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) синус угла между плоскостью ABC и прямой AD.
5.	Даны точки A(2;1;4), B(0;0;2), C(1;-1;6), D(2;-1;2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) координаты точки пересечения прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ и плоскости ABC
6.	Даны точки A(1;3;4), B(1;1;2), C(-1;2;2), D(0;1;6). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.
7.	Даны точки A(2;0;3), B(1;1;7), C(0;1;3), D(2;-2;5). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.
8.	Даны точки A(-1;-2;-1), B(-3;-2;1), C(-1;0;3), D(-3;1;5). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) синус угла между плоскостью ABC и прямой AD.
9.	Даны точки A(-2;5;-3), B(2;-3;1), C(2;-2;-4), D(-3;1;2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC;

	2) координаты точки пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ и плоскости ABC.
10.	Даны точки A(1;3;0), B(-2;1;4), C(2;0;1), D(4;-1;5). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.
11.	Даны точки A(-1;5;-2), B(1;2;2), C(2;4;-3), D(0;1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.
12.	Даны точки A(-1;2;0), B(2;1;5), C(3;3;-4), D(3;-1;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) синус угла между плоскостью ABC и прямой AD.
13.	Даны точки A(-3;0;-1), B(0;3;2), C(-1;1;-2), D(3;2;-4). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) координаты точки пересечения прямой $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости ABC.
14.	Даны точки A(2;1;0), B(-1;3;2), C(2;-3;1), D(-3;0;-2). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.
15.	Даны точки A(5;-3;2), B(3;2;-1), C(4;-2;1), D(3;1;0). Найти: 1) общее уравнение плоскости ABC; 2) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки решения задач на взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Контрольные вопросы:

- Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20
Интегральный признак

Цель: получить навыки исследования сходимости ряда по интегральному признаку

Методические рекомендации для выполнения практической работы:
Признаки сравнения рядов на сходимость.
Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:
1) В знаменателе находится многочлен.
2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.
3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

Признак Даламбера:

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, 2^n, 3^n, 5^n и так далее. Причем, совершенно не важно, где располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что оно там присутствует.
2) В общий член ряда входит факториал.
3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$. Этот случай встречается редко, но! При исследовании такого ряда часто допускают ошибку – см.
Вместе со степенями или (и) факториалами в «начинке» ряда часто встречаются многочлены, это не меняет дела – нужно использовать признак Даламбера.
Кроме того, в общем члене ряда может встретиться одновременно и степень и факториал; может встретиться два факториала, две степени, важно чтобы там находилось **хоть что-то** из рассмотренных пунктов – и это как раз предпосылка для использования признака Даламбера.

Признак Даламбера: Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:
а) При $D < 1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при $D = 0$.
б) При $D > 1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.
в) При $D = 1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$
Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot(n^2+2n+1+n+1-1)}{4\cdot 4^n\cdot(n^2+n-1)}\overset{(4)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right)\overset{(6)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}\right)\overset{(7)}{=}\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

Пример: Возьмём похожий ряд и исследуем его на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^4-(n+1)^2+3}{4^{n+1}\cdot(n+1+1)}}{\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^4-(n+1)^2+3)\cdot(n+1)}{4^{n+1}\cdot(n^4-n^2+3)\cdot(n+2)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot\underbrace{((n+1)^4-(n+1)^2+3)}\cdot\underbrace{(n+1)}}{4\cdot 4^n\cdot\underbrace{(n^4-n^2+3)}_{1}\cdot\underbrace{(n+2)}_{1}}=\frac{1}{4}<1$$

Одного порядка роста

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

Радикальный признак Коши

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если существует предел: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=D$ то:

а) При $D<1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при $D=0$.

б) При $D>1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при $D=\infty$.

в) При $D=1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Интересно отметить, что если признак Коши не даёт нам ответа на вопрос о сходимости ряда, то признак Даламбера нам тоже не даст ответа. Но если признак Даламбера не даёт ответа, то признак Коши вполне может «сработать». То есть, признак Коши является в этом смысле более сильным признаком.

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда **ПОЛНОСТЬЮ** находится в степени, <u>зависящей от «эн»</u>. Либо когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от n, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{5}{n}^{\to 0}}\right)^{3}\overset{(6)}{=}\left(\frac{7}{6}\right)^{3}=\frac{343}{216}>1$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится**.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$

Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{n+2+\frac{1}{n}^{\to 0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n-1}{n}}{\frac{6n+7}{n}}\right)^{n+2}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{7}{n}^{\to 0}}\right)^{n+2}\overset{(6)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}\overset{(7)}{=}0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

Интегральный признак Коши

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Данный ряд сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши является тот факт, что в общем члене ряда есть некоторая функция и её производная.

Сначала берем значок интеграла и переписываем со «счётчика» ряда верхний и нижний пределы: $\int_2^{+\infty}$. Затем под интегралом переписываем «начинку» ряда с буковкой «хэ»: $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}$. Чего-то не хватает…, ах, да, еще в числителе нужно прилепить значок дифференциала: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

Теперь нужно вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. При этом возможно два случая:

1) Если выяснится, что интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ сходится, то будет сходиться и наш ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2) Если выяснится, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ расходится, то наш ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ тоже будет расходиться.
Используем интегральный признак:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$(*) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|\ln x|\right)\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\ln b^{\to+\infty} - \ln\ln 2\right) = +\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$
Используем интегральный признак Коши:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+3)^7}} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$= \int\limits_1^{+\infty} (2x+3)^{-\frac{7}{6}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} (2x+3)^{-\frac{7}{6}} d(2x+3) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 6\cdot \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[6]{(2x+3)}}\right)\Bigg|_1^b = -3\cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{(2b+3)}}^{\to 0} - \frac{1}{\sqrt[6]{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt[6]{5}}$$

Получено конечное число, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Примечание: *полученное число* $\frac{3}{\sqrt[6]{5}}$ – *<u>не является</u> суммой ряда!!!*

<u>Задание:</u>

Исследовать ряды на сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки исследования рядов на сходимость с помощью интегрального признака

Контрольные вопросы:

- Ряды
- Признаки сходимости
-

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №21
Функциональные ряды. Область сходимости

Цель: получить навыки нахождения области сходимости ряда

Методические рекомендации для выполнения практической работы:
Обычный числовой ряд, вспоминаем, состоит из чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **ЧИСЛА**.
Функциональный же ряд состоит из **ФУНКЦИЙ**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + \dots$$

В общий член ряда $u_n(x)$ помимо многочленов, факториалов и др. **непременно** входит переменная. Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$. Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \dots$$

Как видите, все члены функционального ряда $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), u_5(x), \dots$ – это **функции**.
Наиболее популярной разновидностью функционального ряда является **степенной ряд**.

Степенной ряд – это ряд, в общий член $u_n(x)$ которого входят **целые положительные степени** независимой переменной x. Упрощенно степенной ряд во многих учебниках записывают так: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.Простейший пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$

Очень часто степенной ряд можно встретить в следующих «модификациях»: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$, где a – константа. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{n^2} = 2(x+2) + \frac{2^2(x+2)^2}{2^2} + \frac{2^3(x+2)^3}{3^2} + \frac{2^4(x+2)^4}{4^2} + \frac{2^5(x+2)^5}{5^2} + \dots$$

Строго говоря, упрощенные записи степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$ не совсем корректны. В показателе степени» может располагаться более сложное выражение, например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

Или такой степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot (x-1)^{3n-2}}{3^n} = \frac{(x-1)}{3} + \frac{\sqrt{2}\cdot (x-1)^4}{3^2} + \frac{\sqrt{3}\cdot (x-1)^7}{3^3} + \frac{\sqrt{4}\cdot (x-1)^{10}}{3^4} + \frac{\sqrt{5}\cdot (x-1)^{13}}{3^5} + \dots$$

Сходимость степенного ряда.

Интервал сходимости, радиус сходимости и область сходимости

Не нужно пугаться такого обилия терминов, они идут «рядом друг с другом» и не представляют особых сложностей для понимания. Лучше выберем какой-нибудь простой подопытный ряд и сразу начнём разбираться.

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Переменная x может принимать **любое действительное значение** от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Подставим в общий член ряда несколько произвольных значений «икс»:

Если $x=1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Если $x=-1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Если $x=3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Если $x=-\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{5^n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 5^n}$

И так далее.

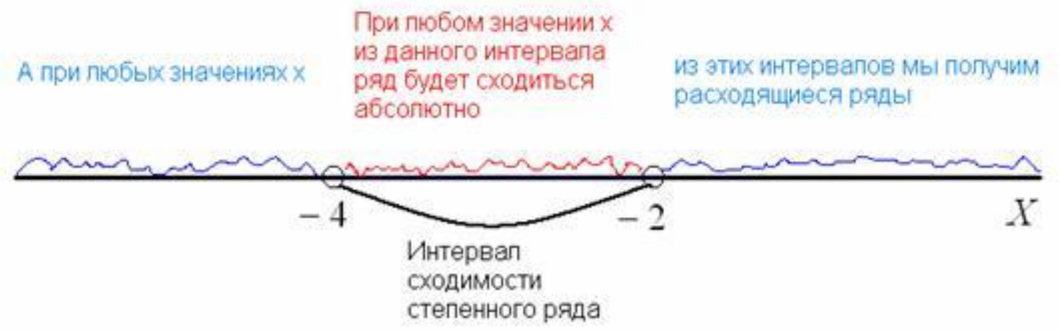
Очевидно, что, подставляя в $\frac{x^n}{n^2}$ то или иное значение «икс», мы получаем различные числовые ряды. Некоторые числовые ряды будут сходиться, а некоторые расходиться. И наша задача **найти множество значений «икс»**, при котором степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ будет <u>сходиться</u>. Такое множество и называется **областью сходимости ряда**.

Для любого степенного ряда возможны три случая:

1) Степенной ряд *сходится абсолютно* на некотором интервале $(a;b)$. Иными словами, если мы выбираем любое значение «икс» из интервала $(a;b)$ и подставляем его в общий член степенного ряда, то у нас получается *абсолютно сходящийся* числовой ряд. Такой интервал $(a;b)$ и называется **интервалом сходимости степенного ряда**.

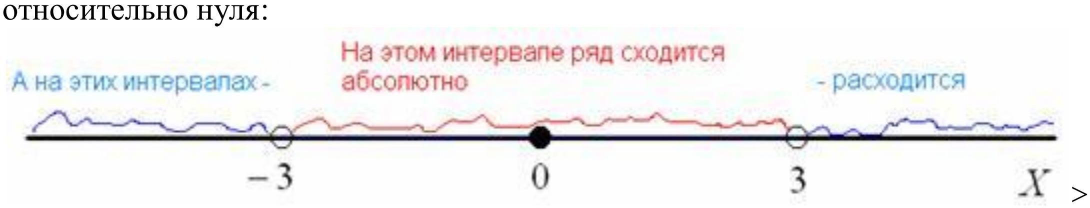
Радиус сходимости, если совсем просто, это **половина длины** интервала сходимости: $R=\frac{b-a}{2}$

Геометрически ситуация выглядит так:



В данном случае, интервал сходимости ряда: $(-4;-2)$, радиус сходимости ряда:
$R=\dfrac{-2-(-4)}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=1$

Широко распространен тривиальный случай, когда интервал сходимости симметричен относительно нуля:



Здесь интервал сходимости ряда: $(-3;3)$, радиус сходимости ряда: $R=\dfrac{3-(-3)}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

А что будет происходить на концах интервала $(a;b)$? В точках $x=a$, $x=b$ степенной ряд **может, как сходиться, так и расходится**, и для выяснения этого необходимо проводить дополнительное исследование. После такого исследования речь идёт уже об **области сходимости ряда**:

– Если установлено, что степенной ряд расходится на обоих концах интервала, то **область сходимости ряда** совпадает с интервалом сходимости: $(a;b)$

– Если установлено, что степенной ряд сходится на одном конце интервала и расходится на другом, то **область сходимости ряда** представляет собой полуинтервал: $[a;b)$ или $(a;b]$.

– Если установлено, что степенной ряд сходится на обоих концах интервала, то **область сходимости ряда** представляет собой отрезок: $[a;b]$

Термины очень похожи, **область сходимости ряда** – это чуть более детализированный **интервал сходимости ряда**.

С двумя оставшимися случаями всё короче и проще:

2) Степенной ряд *сходится абсолютно* при **любом** значении x. То есть, какое бы значение «икс» мы не подставили в общий член степенного ряда – в любом случае у нас получится *абсолютно сходящийся* числовой ряд. Интервал сходимости и область сходимости в данном случае совпадают: $(-\infty;+\infty)$. Радиус сходимости: $R=+\infty$. Рисунок приводить не буду, думаю, нет необходимости.

3) Степенной ряд сходится в единственной точке. Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x=0$. В этом случае интервал сходимости и область сходимости ряда тоже совпадают и равны единственному числу – нулю: $x=0$. Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x=a$, если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$, то, понятно, – в точке «минус а». Радиус сходимости ряда во всех случаях, естественно, нулевой: $R=0$.

Других вариантов нет. Область сходимости степенного ряда – это всегда либо единственная точка, либо любое «икс», либо интервал $(a;b)$ (возможно полуинтервал, отрезок). Подчеркиваю, что **данная классификация справедлива для степенных рядов**. Для произвольного функционального ряда она в общем случае является неверной.

Исследование степенного ряда на сходимость

Пример

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

На первом этапе находим интервал сходимости ряда. Почти всегда необходимо использовать признак Даламбера и находить предел $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Единственное отличие – все происходит под знаком модуля.

Итак, решаем предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right| \overset{(3)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right| \overset{(4)}{=}$$

$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \overset{(5)}{=} \frac{\infty}{\infty} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}} = |x|\cdot 1 = |x|$$

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему.

(2) Избавляемся от «четырехэтажности» дроби.

(3) В числителе по правилу действий со степенями «убираем» один «икс». В знаменателе возводим двучлен в квадрат.

(4) Выносим оставшийся «икс» за знак предела, причем, выносим его вместе со знаком модуля. Дело в том, что наш предел $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}$ и так будет неотрицательным, а вот «икс» вполне может принимать отрицательные значения. Поэтому модуль относится именно к нему.

(5) Устраняем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ стандартным способом.

После того, как предел найден, нужно проанализировать, что у нас получилось.

Если в **пределе получается ноль**, то алгоритм решения заканчивает свою работу, и мы даём окончательный ответ задания: «Область сходимости степенного ряда: $-\infty < x < +\infty$» То есть, степенной ряд сходится при любом значении «икс». Ответ можно записать эквивалентно: «Ряд сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$ »

Если в **пределе получается бесконечность**, то алгоритм решения также заканчивает свою работу, и мы даём окончательный ответ задания: «Ряд сходится при $x=0$» (или при $x=a$ либо $x=-a$»).

Если в пределе получается не ноль и не бесконечность, то у нас самый распространенный на практике случае №1 – ряд сходится на некотором интервале.

В данном случае предел равен $|x|$. Найдем интервал сходимости ряда. Составляем неравенство:

$|x|<1$

Раскрываем неравенство с модулем по школьному правилу $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$. В данном случае:

$-1<x<1$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

На втором этапе необходимо исследовать сходимость ряда на концах найденного интервала.

Сначала берём левый конец интервала $x=-1$ и подставляем его в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$:

При $x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Получен числовой ряд, и нам нужно исследовать его на сходимость. Используем признак Лейбница:

1) Ряд является знакочередующимся.

2) $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится (случай обобщенного гармонического ряда).

Таким образом, полученный числовой ряд сходится абсолютно.

Далее рассматриваем правый конец интервала $x=1$, подставляем это значение в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$:

При $x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится.

Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится на обоих концах найденного интервала.

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1 \le x \le 1$

Имеет право на жизнь и другое оформление ответа: Ряд сходится, если $x\in[-1;1]$

Иногда в условии задачи требуют указать радиус сходимости. Очевидно, что в рассмотренном примере $R=1$.

<u>Пример 2</u>

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$

Решение: Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1+1}}}{\dfrac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{x^n\cdot 3\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+2}}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}} = \frac{|x|}{3}$$

Составляем стандартное неравенство:

Ряд сходится при $\frac{|x|}{3} < 1$

Слева нам нужно оставить **только** $|x|$, поэтому умножаем обе части неравенства на 3:
$|x| < 3$

И раскрываем неравенство с модулем по правилу $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$:
$-3 < x < 3$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.
Исследуем сходимость степенного ряда на концах найденного интервала.

1) При $x = -3 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Обратите внимание, что при подстановке значения $x = -3$ в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}}$ у нас сократилась степень 3^n. Это верный признак того, что мы правильно нашли интервал сходимости ряда.
Исследуем полученный числовой ряд на сходимость.
Используем признак Лейбница.
– Ряд является знакочередующимся.
– $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно.
Вывод: Ряд сходится.
Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Сравним данный ряд с расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}^{\to 0}} \right) = 1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ расходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится только условно.

2) При $x = 3 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – расходится (по доказанному).

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-3 \le x < 3$. При $x = -3$ ряд сходится только условно.

В рассмотренном примере областью сходимости степенного ряда является полуинтервал, причем во всех точках интервала $(-3;3)$ степенной ряд *сходится абсолютно* (см. предыдущий параграф), а в точке $x=-3$, как выяснилось – *сходится только условно*.

Задание:

1. Исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{7^n\cdot(n+1)}$
2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$
3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!(x-2)^{n+1}}{10^n}$
4. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$
5. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки исследования рядов на область сходимости

Контрольные вопросы:

- Функциональные ряды
- Область сходимости

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №22
Ряд Тейлора для некоторых элементарных функций

Цель: получить навыки разложения функции в ряд Тейлора, ряд Маклорена

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ в некотором интервале раскладывается в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Данная формула носит фамилию англичанина Тейлора (ударение на первый слог).
На практике процентах в 95-ти приходится иметь дело с частным случаем формулы Тейлора, когда $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд получил известность благодаря шотландцу Маклорену (ударение на второй слог). Разложение Маклорена также называют *разложением Тейлора по степеням* x.
Вернемся к таблице разложений элементарных функций и выведем разложение экспоненциальной функции:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

По формуле Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$, тогда:

$f(0)=e^0=1$

Теперь начинаем находить **производные в точке** ноль: первую производную, вторую производную, третью производную и т.д. Это просто, поскольку при дифференцировании экспонента превращается в саму себя:

$f'(x)=(e^x)'=e^x$

$f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=(f'(x))'=(e^x)'=e^x$

$f''(0)=e^0=1$

$f'''(x)=(f''(x))'=(e^x)'=e^x$

$f'''(0)=e^0=1$

И так далее….

Совершенно очевидно, что $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=1$

Подставляем единицы в формулу Маклорена и получаем наше табличное разложение!

*Пример:*Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда. $f(x)=x\cos 3x$

Конструируем ряд. Используем элементарное разложение:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

.

Область сходимости ряда: $-\infty < \alpha < +\infty$

В данном случае $\alpha = 3x$

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

В числителях раскрываем скобки:

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Теперь умножаем обе части на «икс»:

$$x\cos 3x = x \cdot \left(1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

В итоге искомое разложение функции в ряд:

$$y = x\cos 3x = x - \frac{3^2 x^3}{2!} + \frac{3^4 x^5}{4!} - \frac{3^6 x^7}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} + \ldots$$

Как определить область сходимости? Разложение косинуса сходится при ЛЮБОМ значении «альфа»: $-\infty < \alpha < +\infty$, а значит и при $\alpha = 3x$. Домножение $\cos 3x$ на «икс» не играет никакой роли в плане сходимости. Поэтому область сходимости полученного ряда: $-\infty < x < +\infty$

Пример: Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.

$f(x) = \ln(1 - x^2)$

В таблице находим похожее разложение:

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n} + \ldots$$

Область сходимости ряда: $-1 < \alpha < 1$, концы интервала нужно исследовать дополнительно.

Трюк прост: перепишем функцию немного по-другому:

$f(x) = \ln(1 - x^2) = \ln(1 + (-x^2))$

Таким образом, $\alpha = -x^2$ и:

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-x^2)^n}{n} + \ldots$$

Окончательно:

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{n} - \ldots$$

Теперь нужно определить область сходимости. Смотрим на табличное неравенство $-1 < \alpha < 1$. У нас тут минус и «икс» в квадрате: $\alpha = -x^2$, не факт, что область сходимости полученного ряда будет именно такая**. В сомнительных случаях надежнее всего подробно проанализировать полученный степенной ряд**. В данном случае функция разложилась в ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$. Используя штатный признак Даламбера, легко найти интервал сходимости ряда: $-1 < x < 1$. Будет ли сходиться ряд на концах интервала? Если подставить значения $x = 1$, $x = -1$, то в обоих случаях получится расходящийся гармонический ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (знак «минус» перед рядом никак не влияет на сходимость или расходимость).

Таким образом, область сходимости полученного ряда: $-1 < x < 1$

Интересно отметить, что простейшее разложение из учебника

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ сходится ещё в одной точке, и область сходимости соответствующего ряда: $-1 < x \le 1$. А разложение в ряд такого логарифма:

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots$ – сходится на обоих концах интервала: $-1 \le x \le 1$

<u>Задание:</u>

1. Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.
   $$f(x) = \frac{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$
2. Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.
   $$f(x) = \frac{1}{1+3x^3}$$
3. Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.
   $$f(x) = \frac{6x}{2-3x}$$

<u>Вывод:</u>

В ходе выполнения практической работы были получены навыки разложения функции в ряд Тейлора

<u>Контрольные вопросы:</u>

- Ряд Тейлора
- Ряд Маклорена

<u>Литература:</u>

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №23
Частные производные функции нескольких переменных

<u>Цель:</u> получить навыки нахождения частных производных функций нескольких переменных

<u>Методические рекомендации для выполнения практической работы:</u>

Функция двух переменных обычно записывается как $z = f(x; y)$, при этом переменные x, y называются *независимыми переменными* или *аргументами*.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x; y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.

Пример: Найти частные производные первого и второго порядка функции
$z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

z'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Начнем с z'_x. **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$
$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**. Подстрочные индексы НЕ ТЕРЯЕМ по ходу решения.

(2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Упрощаем.

Теперь z'_y. **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.
(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки». То есть данная таблица рАвно справедлива и для y (да и вообще почти для любой буквы)**. В частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)' = 0$ и $(y^n)' = ny^{n-1}$.

1) Когда мы находим частную производную z'_x, переменная y считается константой.

2) Когда мы находим частную производную z'_y, переменная x считается константой.
3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной (x, y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$
$z'_y = 6x^2y^2 + 5$
Сначала найдем смешанные производные:
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$
берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».
Аналогично:
$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

<u>Задание:</u>

Найти частные производные первого и второго порядка

Вариант	Задание
1.	а) $z = x^3 + arctg(e^y) + y(x-1)$, б) $z = \sin y - x + 3y$
2.	а) $z = y\sin x - \cos x$, б) $z = x^3 + y^2 - 3xy$

3.	а) $z = y + x^2 + arctgy$, б) $z = \sin x + x^2 y$
4.	а) $z = x^2 y + \arcsin x$, б) $z = e^x + xy$
5.	а) $z = \arcsin y - yx$, б) $z = 2x^2 + x - y^3$
6.	а) $z = arctgy + 2x - \sin y$ б) $z = x - 3y + e^y - 5$
7.	а) $z = y^2 + 5x - 5^x - \sin y$ б) $z = tgy + x + y^2$
8.	а) $z = e^x tgy - x^2 + y^3$ б) $z = \cos x + e^{4y} - 9$
9.	а) $z = x^2 + xy - (y+1)^2$ б) $z = y - x + \arcsin x - \arcsin y$
10.	а) $z = x^4 + y^4 - x^2 y^2$ б) $z = e^x \sin y + e^{-y} \cos x$
11.	а) $z = 2x \ln y + x - 4x$ б) $z = x + \ln y - x^2 e^y$
12.	а) $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} - x + y$ б) $z = x^2 \sin y + 2x - y + 1$
13.	а) $z = x^2 + y^2 \ln x - 4$ б) $z = x^4 - 6x^2 y^2 + 9y^4 + 15y^2$
14.	а) $z = x - \sin x + arctgy$ б) $z = y \; arctg \; y - \arcsin x$
15.	а) $z = x^4 - 3y + 2^y - 6$ б) $z = e^x - y^2 + 5x$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения частных производных

Контрольные вопросы:

- Функции нескольких переменных
- Частные производные

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №24
Нахождение экстремумов функции нескольких переменных

Цель: получить навыки нахождения экстремумов функций нескольких переменных

Методические рекомендации для выполнения практической работы:

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Говорят, что (x_0,y_0) – точка (локального) максимума, если для всех точек (x,y) некоторой окрестности точки (x_0,y_0) выполнено неравенство $f(x,y)<f(x_0,y_0)$. Если же для всех точек этой окрестности выполнено условие $f(x,y)>f(x_0,y_0)$, то точку (x_0,y_0) называют точкой (локального) минимума.

Точки максимума и минимума часто называют общим термином – точки экстремума. Если (x_0,y_0) – точка максимума, то значение функции $f(x_0,y_0)$ в этой точке называют максимумом функции $z=f(x,y)$. Соответственно, значение функции в точке минимума именуют минимумом функции $z=f(x,y)$. Минимумы и максимумы функции объединяют общим термином – экстремумы функции.

Алгоритм исследования функции $z=f(x,y)$ на экстремум

1. Найти частные производные $\partial z\partial x$ и $\partial z\partial y$. Составить и решить систему уравнений $\partial z\partial x=0;\partial z\partial y=0$Точки, координаты которых удовлетворяют указанной системе, называют стационарными.
2. Найти $\partial 2z\partial x2$, $\partial 2z\partial x\partial y$, $\partial 2z\partial y2$ и вычислить значение $\Delta=\partial 2z\partial x2\cdot\partial 2z\partial y2-(\partial 2z\partial x\partial y)2$ в каждой стационарной точке. После этого использовать следующую схему:
   1. Если $\Delta>0$ и $\partial 2z\partial x2>0$ (или $\partial 2z\partial y2>0$), то в исследуемая точка есть точкой минимума.
   2. Если $\Delta>0$ и $\partial 2z\partial x2<0$ (или $\partial 2z\partial y2<0$), то в исследуемая точка есть точкой максимума.
   3. Если $\Delta<0$, то в расматриваемой стационарной точке экстремума нет.
   4. Если $\Delta=0$, то ничего определённого про наличие экстремума сказать нельзя; требуется дополнительное исследование.

Пример: Найти экстремум функции $z = 3x^2y- x^3 - y^4$.

Решение: Здесь $z'_x=6xy-3x^2$, $z'_y=3x^2-4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

1. Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:
$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$
2. Отсюда получаем точки $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.
3. Находим частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx}=6y-6x$, $z''_{xy}=6x$, $z''_{yy}=-12y_2$.
4. В точке $M_1(6;3)$ имеем: A = -18, B = 36, C = -108, отсюда
5. $AC-B^2=-18\bullet(-108)-362=648$, т. е. $\Delta>0$.
6. Так как $A<0$, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{max}=z(6;3)=3\bullet 36\bullet 3-63-34=324-216-81=27$.
7. В точке $M_2(0;0)$: A =0, B = 0, C = 0 и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0;0)=0$. Можно заметить, что $z=-y^4<0$ при $x=0$, $y \neq 0$; $z =-x^3>0$ при $x<0$, $y=0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0;0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет.

Задание:

Исследовать функцию на экстремум:

1. $Z=x^2+y^2+xy-4x-5y$
2. $Z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
3. $Z=xy(1-x-y)$
4. $Z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln x$
5. $Z=xy/(x^2+y^2)$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки нахождения экстремумов функции двух переменных.

Контрольные вопросы:

- Функции нескольких переменных
- Экстремумы функции

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №25
Двойной интеграл

Цель: получить навыки нахождения двойного интеграла

Методические рекомендации для выполнения практической работы:
Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:
$\iint\limits_D f(x;y)dxdy$
Разбираемся в терминах и обозначениях:
$\iint$ – значок двойного интеграла;
D – область интегрирования (плоская фигура);
$f(x;y)$ – подынтегральная функция двух переменных, часто она довольно простая;
dx, dy – значки дифференциалов.
Вычислить двойной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**. Самое обычное число: $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = C$, где $C = const$

Результат (число C) может быть отрицательным. И ноль тоже запросто может получиться.
Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его необходимо свести к так называемым *повторным интегралам*. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_?^? dx \int\limits_{??}^{??} f(x;y)dy$$

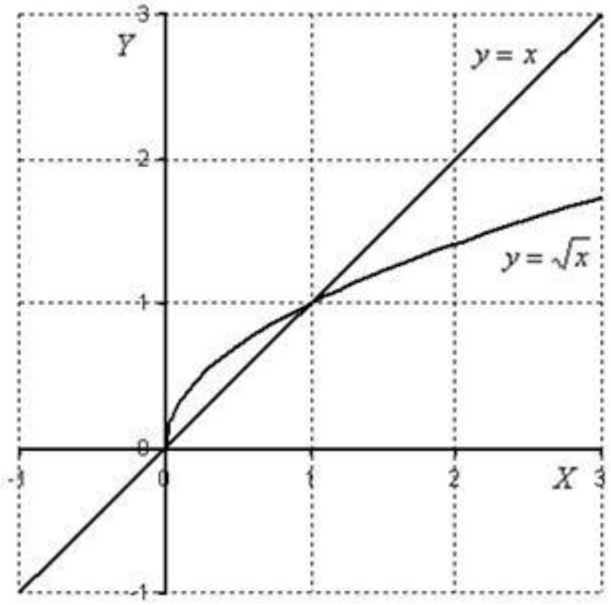
Вместо знаков вопроса необходимо расставить пределы интегрирования. Причём одиночные знаки вопроса $?$ у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса $??$ у внутреннего интеграла – это функции одной переменной $y = f(x)$, зависящие от «икс».
Откуда взять пределы интегрирования? Они зависят от того, какая в условии задачи дана область D. Область D представляет собой обычную плоскую фигуру, с которой вы неоднократно сталкивались, например, при **вычислении площади плоской фигуры** или **вычислении объема тела вращения**. Очень скоро вы узнаете, как правильно расставлять пределы интегрирования.
После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют непосредственно вычисления: сначала берётся внутренний интеграл $\int\limits_{??}^{??} f(x;y)dy$, а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.
Алгоритм решения двойного интеграла:
1) Необходимо выполнить чертёж. **Без чертежа задачу не решить**. Точнее, решать-то она решается, но это будет похоже на игру в шахматы вслепую. На чертеже следует изобразить область D, которая представляет собой плоскую фигуру. Чаще всего фигура незамысловата и ограничена какими-нибудь прямыми, параболами, гиперболами и т.д. Грамотную и быструю технику построения чертежей можно освоить на уроках **Графики и основные свойства элементарных функций**, Геометрические преобразования графиков. Итак, этап первый – выполнить чертёж.
2) Расставить пределы интегрирования и перейти к повторным интегралам.
3) Взять внутренний интеграл

4) Взять внешний интеграл и получить ответ (число).

Пример: Вычислить двойной интеграл

$\iint\limits_D x dx dy$, $D: y=\sqrt{x};\ y=x$

Решение: Изобразим область интегрирования D на чертеже:



Выберем следующий порядок обхода:

$x \le y \le \sqrt{x}$

$0 \le x \le 1$

Таким образом:

$$\iint\limits_D x dx dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} x dy = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} dy$$

Обратите внимание на следующее действие: в данном случае можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл. Почему? Во внутреннем интеграле $\int\limits_x^{\sqrt{x}} x dy$ **интегрирование проводится по «игрек», следовательно, «икс» считается константой**. А любую константу можно вынести за знак интеграла, что благополучно и сделано.

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, найдём внутренний интеграл:

$$\int\limits_x^{\sqrt{x}} dy = (y)\Big|_x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x$$

Вместо «игрека» подставляем функции!

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл $\int\limits_0^1 x dx$, при этом ни в коем случае не забываем про «икс», который там уже находится:

$$\int\limits_0^1 x(\sqrt{x} - x)dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - (0-0) = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

Задание:

1. С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=e$, $x=0$
2. С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}, y=2, y=4, y=x-1$
3. С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y^2=2x+4$, $y^2=-\frac{1}{2}x+4$

Вывод:

В ходе выполнения практической работы были получены навыки вычисления двойного интеграла

Контрольные вопросы:

- Двойной интеграл

Литература:

- Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: Наука, 1990
- Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика – М.: Феникс, 2011
- Дадаян А.А. Математика – М.:Форум, 2010