



Якоб Бернулли (1654 – 1705)

Якоб Бернулли - великий швейцарский ученый, математик. Родился 27 декабря 1654 года. Якоб Бернулли является одним из основателей теории вероятностей и математического анализа. Кроме того, Якоб Бернулли внес неоценимый вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Якобу Бернулли принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы числа Бернулли.

Самостоятельная работа

Задача 1. Из n аккумуляторов за год хранения k выходит из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных. $n=100, k=7, m=5, l=3$.

Задача 2. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов, включается за время T . Вероятность отказа каждого из них за это время равна $0,2$. Найти вероятность того, что откажут:

- а) три элемента;
- б) не менее четырех элементов;
- в) хотя бы один элемент.

Задача 3. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна $0,2$. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров:

- а) не более одного потребует ремонта;
- б) хотя бы один не потребует ремонта.

Величие человека - в его способности мыслить.

(Б. Паскаль)

Формула Бернулли





Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A** .

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P(m,n)$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз. Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A)=p$, а противоположное ему событие \bar{A} с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p$. Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i . Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны. Если в результате n опытов событие A наступает ровно m раз, то остальные $n-m$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m . Это количество сочетаний находится

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

по формуле: $P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:**

Формула Бернулли важна тем, что

справедлива для любого количества независимых испытаний.

Пример: По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Решение: Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий. Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

n раз. В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$$

. Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!1!} p^4 (1-p) = 0,0768$$

. Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$$

