***Исследование корректности задач интегральной геометрии и краевых задач для некоторых параболических уравнений.***

Задачи интегральной геометрии состоят в нахождении функции, определенной на некотором многообразии, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий меньшей размерности.

Новый период развития интегральной геометрии начался в 1966 году. Впервые М.М.Лаврентьевым и В.Г.Романовым [1],[2] было показано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии. В дальнейшем теория задач интегральной геометрии получила развитие в работах Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, И.Н.Бернштейна, М.Л.Гервера, В.Р.Кирейтова, Р.Г.Мухометова, Д.С.Аниконова, В.А.Шарафутдинова и других авторов.

Рассматривается задача интегральной геометрии для семейства не гладких кривых, инвариантных относительно горизонтального сдвига [3]

*,*

где *, , - заданные функции,* - заданное семейство кривых *,* удовлетворяющих условию

(\*)

- области, ограниченные кривымии осью *.*

**Теорема*.*** *Если - нерерывно дифференцируема по всем переменным и , непрерывна вместе с производными по , то решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в классе непрерывных финитных функции.*

Пусть

*,*

*.*

**Теорема*.*** *Если , то для решения данной задачи интегральной геометрии справедлива оценка устойчивости*

*,*

*где*

*,*

*.*

Рассматривается задача интегральной геометрии с возмущением для семейства не гладких кривых, инвариантных относительно горизонтального сдвига, удовлетворяющих условию (\*):

(1)

**Теорема.** *Если , - нерерывно дифференцируемые функции, причем ,*

*, .*

*тогда решение уравнения (1) единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функции.*

Рассмотрена задача восстановления функции через интегралы от нее по семейству кривых типа парабол инвариантных относительно вертикального сдвига [4]

*,*

где

*–* длина проекции кривой из заданного семейства на плоскости *.*

**Теорема.** *Пусть функция трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным, четна по переменной и удовлетворяет условиям*

*,*

*тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточно малой области в классе финитных функций с носителем , принадлежащих по , а по переменной удовлетворяющей условию , если ; , если , , - показатель степени роста функции по .*

Исследуется устойчивость задачи интегральной геометрии

*,*

где *-* семейство ветвей парабол *.* Предполагается, что функциядважды непрерывно дифференцируема и финитна в области *.*

**Теорема.** *На множестве корректности справедлива оценка устойчивости*

*.*

Для указанной задачи интегральной геометрии оценка условной устойчивостиполучена и в более общем случае, когда рассматриваются кривые типа парабол *.* Предполагается, что функциянепрерывная финитная функция в области *,* непрерывна по *,* непрерывно дифференцируема по *η* в области *.*

**Теорема.** *Если , то справедлива оценка устойчивости*

*,*

Исследуется устойчивость пространственной задачи интегральной геометрии с не гладкими кривыми [5]

*,*

где семейство кривыхопределяется

**Теорема.** *Если , , , то справедлива оценка*

*.*

Пусть - плоская, ограниченная, односвязная область, имеющая гладкую границу Г:

(2)

где - длина кривой Г. В заданы гладкие кривые уравнениями

(3)

где - точка, из которой выходит кривая под углом , перемен­ный параметр есть длина дуги. Множество определения функций и есть множество

где - длина части кривой, выходящей из точки под углом и лежащей между и точкой пересечения кривой с границей.

Пусть множество кривых (3) будет таково, что его можно рассматри­вать как двухпараметрическое семейство кривых удовлетворяю­щее следующим условиям:

а) через любые две различные точки из проходит единственная кривая; каждая кривая семейства пересекает Г в точкахи другие точки не лежат па Г; длины всех кривых равномерно ограничены;

б) причем все производные этих функций равномерно ограничены в ;

в)

где - постоянная,

г)

аналогичные равенства справедливы также для производных от этих функций до третьего порядка включительно.

Пусть и

(4)

Задача интегральной геометрии (4) заключается в отыскании функции в области по данным кривым и функции .

Весьма общий результат по единственности и оценкам устойчивости для задачи интегральной геометрии (4) был получен Р.Г. Мухометовым. В его работе было показано, что если семейство кривых удовле­творяет условиям а)-г), то задача (4) эквивалентна следующей гранич­ной задаче :

где - часть кривой из семейства , соединяющая точки и ,

(7)

Поставим следующую разностную задачу (зависящую от параметра ): найти функции которые удовлетворяют уравнению

(8)

и граничному условию

Здесь

Отметим, что в этой постановке информация о решении задается не только на границе Г, но и в некоторой ее -окрестности, что связано с наличием особенностей типа у производных в окрестности любой точки вида [7].

**Теорема.** *Предположим, что решение задачи* (8) - (9) *су­ществует. Пусть при всех* *функции*

а функция удовлетворяет условиям

Тогда при всех имеет место оценка

в которой - некоторая положительная постоянная.

Далее мы рассматриваем обобщение задачи (4):

где - некоторая известная функция.

Введем функцию где - часть кривой из семейства , соединяющая точки Тогда

Из данных задачи получаем для граничное условие

Всюду в дальнейшем предполагаем, что коэффициенты и решение задачи (11) - (12) обладают следующими свойствами:

Поставим следующую разностную задачу (зависящую от параметра ): найти функции которые удовлетворяют уравнению

и граничному условию

Здесь

Для поставленной задачи (13) - (14) получена оценка устойчивости и доказана следующая теорема единственности [8],[9]:

**Теорема**. Предположим, что решение задачи (13) - (14) суще­ствует. Пусть при всех функция

а функции удовлетворяют условиям

Тогда при всех имеет место оценка

в которой зависит от функции и семейства кривых.

Отметим, что при более сильных априорных предположениях можно получить оценки условной устойчивости конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии [10].

Поставим разностную задачу: найти функцию , удовлетворяющую следующим соотношениям

Здесь

Результатом исследования задачи (15) - (17) является следующее утверждение.

**Теорема.** Предположим, что решение задачи (15) - (17) су­ществует и кроме того

где - постоянная. Пусть функция удовлетворяет условию

Тогда при всех имеет место оценка

Здесь - некоторая положительная постоянная, не зависящая от

Рассмотрим теперь конечно-разностный аналог следующей граничной задачи:

Предположим, что коэффициенты и решение задачи (18) - (19) обла­дают следующими свойствами:

Поставим разностную задачу: найти функцию удовлетворяющую следующим соотношениям

где

Для поставленной задачи (20) - (22) доказана следующая

**Теорема.** Предположим, что решение задачи (20) - (22) су­ществует и кроме того

при всех

Тогда существует, положительная постоянная такая, что при всех

имеет место оценка

в которой зависит от. функции и семейства кривых

Первыми работами, посвященными исследованиям параболических уравнений с меняющимся направлением времени вида , когда квадратичная форма эллиптического оператора меняет знак при переходе через многообразие, лежащее в области определения решения, были работы М. Жевре (Gevrey M., 1913-1914). В дальнейшем линейные и нелинейные уравнения такого вида исследовали в своих работах С.А.Терсенов [11], В.Н.Врагов, Н.Н.Яненко, В.А.Новиков, Н.А.Ларькин, И.Е.Егоров, О.Аrenа, C.D.Pagani, А.А.Керефов, Т.И.Зеленяк, А.Г.Подгаев, А.И.Кожанов и другие. В последствии было выяснено, что такие уравнения входят в так называемый класс уравнений переменного типа [12].

Разрешимость первой и второй краевых задач для модельных уравнений вида

в области

в области любое, в пространстве функции целое, была исследована А.К.Конысовым [13]. С применением методов теории потенциала эти задачи редуцируются к системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа с ядром Коши, для которой в случае значения индекса были получены соответственно условий, необходимые и достаточные для существования искомых решений из пространства .

Также исследованы уравнения параболистического типа с меняющимся направлением времени

и

в области из пространства , внутри которой на гиперплоскости они меняют направление времени. Для указанных уравнений обобщенные решения отыскиваются из пространства существование которых доказывается методом эллиптической регуляризации, т.е. каждое решение будет получено как предел при решения соответствующей задачи Дирихле в области для регуляризованного строго эллиптического уравнения

с граничным условием

Для обеспечения предельного перехода получены нужные априорные оценки;

А.К.Конысовым также исследована разрешимость первой краевой задачи для двухвременного ультрапараболического уравнения с переменой направления времени (вектора):

где производная по направлению вектора

взятая вдоль характеристики. В этом случае решение уравнения также ищется из класса в параллелепипеде

Разрешимость поставленной задачи обеспечивается путем сведения системы интегральных уравнений с обобщенными операторами Абеля к Фредгольмовым интегральным уравнениям второго рода, при котором будут получены необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи [14].

Для рассмотренных выше задач корректность обеспечивается дополнительными условиями склеивания решения внутри области и применением теории сингулярных интегральных уравнений в случае отрицательного индекса задачи ([15].

*Литература*

1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 286 с.*
2. *Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.*
3. *Дильманов Т.Б. Теорема единственности решения одной задачи интегральной геометрии // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979.-с. 66-70.*
4. *Дильманов Т.Б. Об условной корректности одной задачи интегральной геометрии // Вопросы корректности задач математической физики и анализа.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.-с. 52-60.*
5. *Дильманов Т.Б. Об одной задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Вопросы корректности и методы исследования обратных задач.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.-с. 71-75.*
6. *Кабанихин С.И. Проекционно – разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений.-Новосибирск: Наука, 1988. -167с.*
7. *Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. On the stability of a finite-difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry // American Mathematical Society, 1987. –Vol. 35, № 2. –P.16-19.*
8. *Romanov V.G., Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. Investigation of a differential-difference analogue of a three-dimensional problem in integral geometry // American Mathematical Society, 1990. –Vol. 41, № 2. –P.306-309.*
9. *Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. On the Stability Estimation of Finite-Difference and Differential-Difference Analogues of a Two-Dimensional Integral Geometry Problem // Computerized Tomography. Proceedings of the Fourth International Symposium.-VSP, Utrecht, The Netherlands, 1995. –p.246-258.*
10. *Баканов Г.Б. Методы решения конечно – разностных обратных задач теории распространения волн. –Кызылорда: КГУ, 2001.-128с.*
11. *Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. – Новосибирск: Наука, 1985.-104 с.*
12. *Ларкин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. –Новосибирск: Наука, 1983.-270 с.*
13. *Конысов А.К. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. – Новосибирск, 1984. -26 с. (Препринт/АН СССР. Сиб.отделение. Инст-т математики: №79).*
14. *Конысов А.К. О первой краевой задаче для ультрапараболического уравнения с переменой направления времени. /Кызылорд.гуманит.ун-т. – Кызылорда, 1997. – 16 с. Депонир. в КазгосИНТИ 10.02.97, №7431-К 97..*
15. *Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. -512 с*

**Аннотация**

В работе рассматривается задачи интегральной геометрии для семейства кривых и краевые задачи для параболических уравнений. Получены теоремы единственности решения задач интегральной геометрии, необходимые и достаточные условия существования решения краевых задач для некоторых параболических уравнений.