МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ГИМНАЗИЯ им. Академика Н. Г. БАСОВА при ВГУ

**ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА
ПО ТЕМЕ:**

« НЕСТАНДАРТНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ »

Выполнил: **Когтев Никита Михайлович,
ученик 9 «д» класса**

Преподаватель-руководитель: **Балыкина Людмила Александровна,
учитель математики I КК**

Воронеж 2013


Пусть $t=\sqrt{x-1}$, $t\geq 0$
Тогда $t^2=x-1$
$t+\sqrt{t^2+1-2t}=1$
$t+|t-1|=1$
Как я люблю иррациональные уравнения!!!

Мне приходится делить свое время
между политикой и уравнениями. Однако
уравнения, по-моему, гораздо важнее потому, что
политика существует только для данного момента,
а уравнения будут существовать вечно.
А. Эйнштейн

Что означает владение математикой?
Это есть умение решать задачи, притом не только
стандартные, но и требующие
известной независимости мышления, здравого смысла,
оригинальности, изобретательности.
Д. Пойа

I. Введение.

Достаточно часто приходиться сталкиваться с задачами, решение которых требует длинных вычислений, а иногда и эти вычисления не приносят успеха, и как следствие возникает вопрос: а нельзя ли для каждой задачи придумать простое рациональное короткое и изящное решение. Довольно часто можно, но додуматься до такого решения не просто – нужен долгий и упорный поиск. Зато каждое красивое решение трудной задачи всегда вызывает чувство удовлетворения, свидетельствует о глубоких знаниях и творческих способностях учащихся. И неважно, какой дальнейший путь вы себе выберете: колледж, институт, университет… Математика пригодится вам всегда. Ведь еще Платон сказал своему собеседнику: «Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе?» Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед, а находка «оригинального» решения формирует позитивное отношение к предмету, повышает качество знаний, процесс обучения становится более успешным. А ведь вся наша школьная жизнь состоит из маленьких шажков на пути к успеху.

Много сложных заданий, но когда увидишь, что их решения могут быть простыми и понятными, математика перестанет казаться вам непостижимым предметом. Более того, вам станет интересно. «Страшная эта опасность – безделье за партой; безделье шесть часов ежедневно, безделье месяцы и годы. Это развращает, морально калечит человека, и ни школьная бригада, ни школьный участок, ни мастерская – ничего не может возместить того, что упущено в самой главной сфере, где человек должен быть тружеником, - в сфере мысли». (В. А. Сухомлинский)

II. Основные понятия.

1.Уравнение

В алгебре рассматриваются два вида равенств – тождества и уравнения.

Тождество – это равенство, которое выполняется при всех допустимых значениях входящих в него букв.

Уравнение – это равенство с переменной, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв.

Примеры: 1) $\frac{3x}{8}-\frac{4}{3}=3$ 2) $(x-1)(|x|+2)=0$ 3) $2x-1=x+3$

4) $\frac{3x}{2x^2-4x+5}+\frac{2x}{2x^2-6x+5}=3$

Корень уравнения – это число, при подстановке которого в исходное уравнение вместо переменной, получается верное числовое равенство.

Примеры: $(x-1)(|x|+2)=0$

$x=1$

$(1-1)(|1|+2)=0$

$0\cdot 3=0$

$0=0$ верно, значит 1- корень уравнения

Решить уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Все значения неизвестного, при которых уравнение определено, образуют область допустимых значений уравнения (ОДЗ).

Примеры: $\frac{3+2x}{x-1}=4$

$ОДЗ: x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

2. Линейные уравнения.

Уравнение вида ***ax+в =0,*** где ***x*** – неизвестное, а ***a*** и ***в*** – некоторые действительные числа, называется ***линейным уравнением с одним неизвестным.***

При *a≠0* линейное уравнение имеет один корень $x=-\frac{в}{a}$

Пример: решить уравнение $2x-3+4(x-1)=5$

Последовательно раскроем скобки, приведем подобные члены:

$2x - 3 + 4x - 4 = 5,$

$2x + 4x = 5 + 3 + 4,$

$6x = 12,$

$x = 2.$

Ответ: 2.

При *а = 0, в ≠ 0* линейное уравнение не имеет корней

Пример: решить уравнение $2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7$

$2x + 2x - 4x = -4 - 7 + 3 + 2,$

$0x = -6.$

Уравнение решений не имеет.

Ответ: корней нет.

При *а = в = 0* линейное уравнение имеет бесконечно много корней (любое число является корнем)

Пример: решить уравнение $2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$

$2x - 6x + 3 + 6 = 4 - 4x + 5,$

$-4x + 9 = -4x + 9,$

$-4x + 4x = 9 - 9,$

$0x = 0.$

x – любое число

Ответ: $x \in R$

3. Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + вx + c = 0$, где x - переменная, ***a***, ***b***, ***c*** – некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется ***квадратным***.

Коэффициент ***а*** называют ***старшим коэффициентом,*** коэффициент ***в*** – ***вторым коэффициентом,*** ***с*** – ***свободным членом.***

Выражение $в^2 - 4ac$ называется ***дискриминантом*** квадратного уравнения $ax^2 + вx + c = 0$ и обозначается буквой **D**.

Если D = 0, то квадратное уравнение имеет два равных корня

$$x_{1,2} = -\frac{в}{2a}$$

Иногда говорят, что в этом случае уравнение имеет один корень кратности два или просто один корень. С алгебраической точки зрения первый подход предпочтительнее. Однако при решении задач с дополнительными условиями будем считать, что при D = 0 квадратное уравнение имеет единственный корень.

Если D < 0, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если D > 0, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, которые можно найти по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называется ***приведенным***. В случае D > 0 формула корней приведенного квадратного уравнения имеет вид:

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4c}}{2} \, (a = 1)$$

Если $в=2k$, $D = k^2 - ac > 0$, то формула корней квадратного уравнения примет вид:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } k = \frac{в}{2}.$$

Уравнения вида

$ax^2 + вx = 0 \, (a \neq 0, в \neq 0, c = 0)$, $ax^2 + c = 0 \, (a \neq 0, c \neq 0, в = 0)$ и $ax^2 = 0 \, (a \neq 0, в = 0, c = 0)$

называются ***неполными квадратными уравнениями***.

Решим каждое из них:

$$1) \, ax^2 = 0 \, / : a \neq 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x_{1,2} = 0$$

$$2) \, ax^2 + вx = 0$$
$$x(ax + в) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ ax + в = 0, \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -\dfrac{в}{a}, \end{array}\right.$$

$$3) \, ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c \, / : a \neq 0$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$1. \, -\dfrac{c}{a} < 0$, действительных корней нет

$2. \, -\dfrac{c}{a} \geq 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Теоремы Виета.

Прямая теорема: сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$.

В случае неприведенного квадратного уравнения

$$(a \neq 0, a \neq 1) \;\; ax^2 + вx + c = 0 : x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}, \;\; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Обратная теорема: если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Выражение вида $ax^2 + вx + c$, где $a \neq 0$, называется ***квадратным трехчленом***. Корнями квадратного трехчлена называются корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + вx + c = 0$

Если $D > 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде:

$ax^2 + вx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни трехчлена. Если $D = 0$, то

$ax^2 + вx + c = a(x - x_1)^2$, где x_1 – корень трехчлена.

III. Нестандартные приемы решения уравнений и их систем.

1. Решение рациональных уравнений.

Пример 1.

$(x+1)^4+(x+2)^3=1$

$(x+1)^4+(x+2)^3-1=0$, ко второму и третьему слагаемым применим формулу разности кубов, тогда получим:

$(x+1)^4+(x+1)(x^2+4x+4+x+2+1)=0$, вынесем общий множитель

$(x+1)(x^3+3x^2+3x+1+x^2+5x+7)=0$, приведем во второй скобке подобные

$(x+1)(x^3+4x^2+8x+8)=0$, вторую скобку разложим на множители способом группировки

$(x+1)((x+2)(x^2-2x+4)+4x(x+2))=0$

$(x+1)(x+2)(x^2+2x+4)=0$

произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=-2, \\ x^2+2x+4=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=-2, \\ D=4-16=-12<0, \text{действительных корней нет} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;-2\}$.

Пример 2.

$x^2(x-1)^2+(x-2)^3=76$, заметим, что 76= 49 + 27, тогда

$x^2(x-1)^2-49+(x-2)^3-27=0$, первое и второе слагаемые дают разность квадратов, а третье и четвертое – разность кубов

$(x^2-x-7)(x^2-x+7)+(x-5)(x^2-4x+4+3x-6+9)=0$

$(x^2-x-7)(x^2-x+7)+(x-5)(x^2-x+7)=0$, вынесем общий множитель, получим

$(x^2-x+7)(x^2-x-7+x-5)=0$

$(x^2-x+7)(x^2-12)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x+7=0, \\ x^2-12=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}, \\ D=1-28=-27<0, \text{действительных корней нет} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\}$

Пример 3.

$\left(x^2+2x-3\right)^2+\left(x+1\right)^4=10$, заметим, что 10= 9 + 1, тогда получим

$$\left(x^2+2x-3\right)^2-1+\left(x+1\right)^4-9=0$$

$$\left(x^2+2x-3-3\right)\left(x^2+2x-3+3\right)+\left(x^2+2x+1-1\right)\left(x^2+2x+1+1\right)=0$$

$$\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x-6+x^2+2x+2\right)=0$$

$$x\left(x+2\right)\left(2x^2+4x-4\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-2, \\ 2x^2+4x-4=0 \,|\div 2, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-2, \\ D_1=1+2=3>0, \text{ два корня} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-2, \\ x_3=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{1}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-2, \\ x_3=-1+\sqrt{3}, \\ x_4=-1-\sqrt{3}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;-2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\}$

Пример 4.

$(x+2)^2+(x+3)^3+(x+4)^4=2$, заметим, что 2= 1+1, тогда получим

$$(x+2)^2-1+(x+3)^3+(x+4)^4-1=0$$

$$(x+3)(x+1)+(x+3)^3+\left((x+4)^2-1\right)\left((x+4)^2+1\right)=0$$

$$(x+3)(x+1)+(x+3)^3+(x+3)(x+5)\left(x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)\left(x+1+x^2+6x+9\right)+(x+3)(x+5)\left(x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)\left(x^2+7x+10\right)+(x+3)(x+5)\left(x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)\left(x^2+5x+2x+10\right)+(x+3)(x+5)\left(x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)(x+5)(x+2)+(x+5)(x+3)\left(x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)(x+5)\left(x+2+x^2+8x+17\right)=0$$

$$(x+3)(x+5)\left(x^2+9x+19\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=-5, \\ x^2+9x+19=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = -5, \\ D = 81 - 76 = 5 > 0, \text{два корня} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = -5, \\ x_{3,4} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = \dfrac{-9 + \sqrt{5}}{2}, \\ x_4 = \dfrac{-9 - \sqrt{5}}{2}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-3; -5; \dfrac{-9+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-9-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Пример 5.

$(x^2+5x+11)^2 + (x+1)^3 = 31$, заметим, что 31= 27 + 4, тогда получим

$$(x^2+5x+11)^2 - 4 + (x+1)^3 - 27 = 0$$

$$(x^2+5x+11+2)(x^2+5x+11-2) + (x-2)(x^2+2x+1+3x+3+9) = 0$$

$$(x^2+5x+13)(x^2+5x+9) + (x-2)(x^2+5x+13) = 0$$

$$(x^2+5x+13)(x^2+6x+7) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+13 = 0, \\ x^2+6x+7 = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} D = 25 - 52 = -27 < 0, \text{действительных корней нет} \\ D = 36 - 28 = 8 > 0, \text{два корня} \end{array}\right.$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -3 + \sqrt{2}, \\ x_2 = -3 - \sqrt{2}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3+\sqrt{2}; -3-\sqrt{2}\}$

Пример 6.

$(x-5)^2+(x-4)^3+(x-3)^4=2$, заметим, что 2 = 1 + 1, тогда

$$(x-5)^2-1+(x-4)^3+(x-3)^4-1=0$$

$$(x-4)(x-6)+(x-4)(x^2-8x+16)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0$$

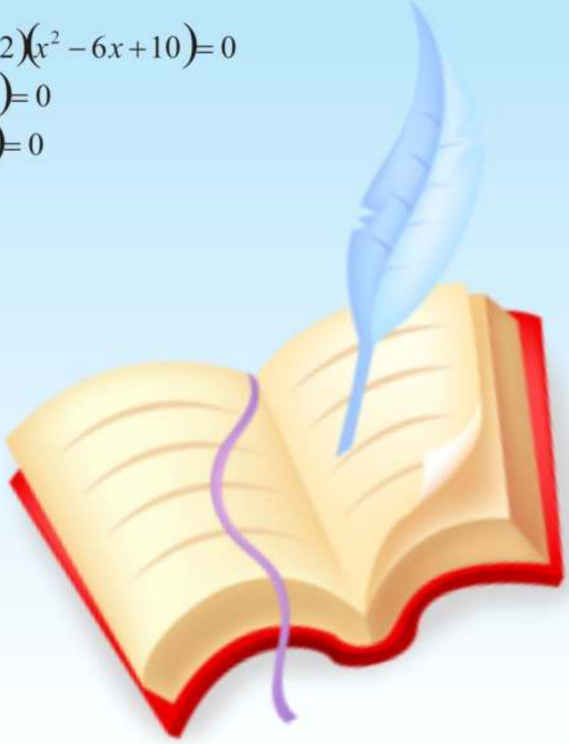
$$(x-4)(x^2-7x+10)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0$$

$$(x-4)(x-2)(x-5)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0$$

$$(x-4)(x-2)(x^2-5x+5)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=2, \\ x^2-5x+5=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=2, \\ D=25-20=5>0, \text{два корня} \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=2, \\ x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{4;2;\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

Пример 7.

$(x^2-4x+8)^2+(x-2)^4+x^3=144$, заметим, что $144=16+64+64$, тогда

$$(x^2-4x+8)^2-16+(x-2)^4-64+x^3-64=0,$$

$$(x^2-4x+8-4)(x^2-4x+8+4)+(x^2-4x+4-8)(x^2-4x+4+8)+(x-4)(x^2+4x+16)=0,$$

$$(x^2-4x+12)(x^2-4x+4+x^2-4x-4)+(x-4)(x^2+4x+16)=0,$$

$$(x^2-4x+12)\,2x(x-4)+(x-4)(x^2+4x+16)=0,$$

$$(x-4)(2x^3-8x^2+24x+x^2+4x+16)=0,$$

$$(x-4)(2x^3-7x^2+28x+16)=0,$$

$$(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+32)=0,$$

$$(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-4x+16)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=-\dfrac{1}{2}, \\ D_1=4-16=-12<0, \text{ действительных корней нет} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{4;-\dfrac{1}{2}\right\}$

Пример 8.

$\left(x^2+x-11\right)^2+\left(x^2+2x-9\right)^2+\left(x^2+3x-7\right)^2=126,$ заметим, что $126=81+36+9$, тогда

$\left(x^2+x-11\right)^2-81+\left(x^2+2x-9\right)^2-36+\left(x^2+3x-7\right)^2-9=0,$

$\left(x^2+x-11-9\right)\left(x^2+x-11+9\right)+\left(x^2+2x-9-6\right)\left(x^2+2x-9+6\right)+\left(x^2+3x-7-3\right)\left(x^2+3x-7+3\right)=0,$

$\left(x^2+x-20\right)\left(x^2+x-2\right)+\left(x^2+2x-15\right)\left(x^2+2x-3\right)+\left(x^2+3x-10\right)\left(x^2+3x-4\right)=0,$

$(x+5)(x-4)(x+2)(x-1)+(x+5)(x+3)(x-3)(x-1)+(x+5)(x-2)(x+4)(x-1)=0,$

$(x+5)(x-1)\left((x-4)(x+2)+(x+3)(x-3)+(x-2)(x+4)\right)=0,$

$(x+5)(x-1)\left(x^2-2x-8+x^2-9+x^2+2x-8\right)=0,$

$(x+5)(x-1)\left(3x^2-25\right)=0,$

$$\left[\begin{array}{l} x+5=0, \\ x-1=0, \\ x^2=\dfrac{25}{3}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=1, \\ x_{3,4}=\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-5;1;-\dfrac{5\sqrt{3}}{3};\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$

Пример 9.

$(2x+2)(5-2x)\left(4x^2+8x+11\right)=10(2x+3)^2,$

$\left(-4x^2+6x+10\right)\left(4x^2+8x+11\right)=10(2x+3)^2.$

Так как x = -1,5 не является корнем этого уравнения, то

$$\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3}\cdot\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=10.$$

Пусть $\dfrac{-4x^2+6x+10}{2x+3}=y,\ \dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=\kappa$, тогда

$$y+\kappa=\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3}+\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=\frac{14x+21}{2x+3}=\frac{7(2x+3)}{2x+3}=7,$$

$$\begin{cases} y\cdot\kappa=10, \\ y+\kappa=7, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=5, \\ \kappa=2, \end{cases} \\ \begin{cases} y=2, \\ \kappa=5, \end{cases} \end{array}\right.$$

Обратная замена :

$1)\ \dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=2,$

$4x^2+8x+11=4x+6,$

$4x^2+4x+5=0,$

$D_1=4-20=-16<0,$ действительных корней нет

$2)\ \dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=5,$

$4x^2+8x+11=10x+15,$

$4x^2-2x-4=0,$

$2x^2-x-2=0,$

$D=1+16=17>0,$ два корня

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right\}$

2. Решение дробно – рациональных уравнений.

Пример 1.

$\dfrac{x+5}{2(x^2-5)}+\dfrac{15-x^2}{x(x-1)}=2$, заметим, что 2 = 1 + 1

$ОДЗ: x\neq\pm\sqrt{5};0;1$

$\dfrac{x+5}{2(x^2-5)}-1+\dfrac{15-x^2}{x(x-1)}-1=0$, приведем к общему знаменателю первое и второе слагаемые и третье и четвертое слагаемые

$\dfrac{x+5-2x^2+10}{2x^2-10}+\dfrac{15-x^2-x^2+x}{x^2-x}=0$

$\dfrac{-2x^2+x+15}{2x^2-10}+\dfrac{-2x^2+x+15}{x^2-x}=0$, вынесем общий множитель

$(-2x^2+x+15)\left(\dfrac{1}{2x^2-10}+\dfrac{1}{x^2-x}\right)=0,$

$(-2x^2+x+15)\ \dfrac{3x^2-x-10}{x(x-1)\,2\,(x^2-5)}=0.$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла

$$\left[\begin{array}{l}-2x^2+x+15=0,\\ \dfrac{3x^2-x-10}{2x(x-1)(x^2-5)}=0.\end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим

$$\left[\begin{array}{l} -2x^2+x+15=0, \\ 3x^2-x-10=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -2x^2+6x-5x+15=0, \\ 3x^2-6x+5x-10=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x(3-x)+5(3-x)=0, \\ 3x(x-2)+5(x-2)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (3-x)(2x+5)=0, \\ (x-2)(3x+5)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=-2{,}5, \\ x_3=2, \\ x_4=-\dfrac{5}{3}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{3;-2{,}5;2;-\dfrac{5}{3}\right\}$

Пример 2.

$$\frac{x-2}{x^2-2}+\frac{x^3+14}{x+4}=x+3$$

$$ОДЗ: x\neq -4;\pm\sqrt{2}$$

$$\frac{x-2}{x^2-2}-x+\frac{x^3+14}{x+4}-3=0$$

$$\frac{x^3-3x+2}{x+4}-\frac{x^3-3x+2}{x^2-2}=0$$

$$\left(x^2-x-6\right)\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x^2-2}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0, \\ \dfrac{x^3-3x+2}{(x+4)(x^2-2)}=0. \end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0, \\ x^3-3x+2=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} D=1+25>0, \text{ два корня} \\ x^3-2x-x+2=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}, \\ x\left(x^2-1\right)-2(x-1)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=-2, \\ (x-1)\left(x^2+x-2\right)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=-2, \\ x_3=1, \end{array}\right.$$

Ответ: $\{3;-2;1\}$

Пример 3.

$$\frac{2x^3+3}{6x^2-7}+\frac{4x^3-45}{x-6}=x+7$$

$$ОДЗ: x\neq 6; \sqrt{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{2x^3+3}{6x^2-7}-x+\frac{4x^3-45}{x-6}-7=0$$

$$\frac{2x^3+3-6x^3+7x}{6x^2-7}+\frac{4x^3-45-7x+42}{x-6}=0$$

$$\frac{-4x^3+7x+3}{6x^2-7}+\frac{4x^3-7x-3}{x-6}=0$$

$$\left(4x^3-7x-3\right)\left(-\frac{1}{6x^2-7}+\frac{1}{x-6}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x^3-7x-3=0, \\ \frac{6x^2-x-1}{\left(6x^2-7\right)(x-6)}=0. \end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим

$$\left[\begin{array}{l} 4x^3-7x-3=0, \\ 6x^2-x-1=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x^3-9x+2x-3=0, \\ 6x^2-3x+2x-1=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (2x-3)\left(2x^2+3x+1\right)=0, \\ (2x-1)(3x+1)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (2x-3)\left(2x^2+2x+x+1\right)=0, \\ (2x-1)(3x+1)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (2x-3)(x+1)(2x+1)=0, \\ (2x-1)(3x+1)=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1{,}5, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -0{,}5, \\ x_4 = 0{,}5, \\ x_5 = -\dfrac{1}{3}, \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1{,}5;-1;-0{,}5;0{,}5;-\dfrac{1}{3}\right\}$

Пример 4.

$\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+3}+\dfrac{1-5x}{x^2-15}=3$, заметим, что 3 = 4 – 1, тогда

$ОДЗ: x \neq -3; \pm\sqrt{15}$

$$\frac{x^2-x-2}{x+3}-4+\frac{1-5x}{x^2-15}+1=0$$

$$\frac{x^2-5x-14}{x+3}+\frac{x^2-5x-14}{x^2-15}=0$$

$$(x^2-5x-14)\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2-15}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=0, \\ \dfrac{x^2+x-12}{(x+3)(x^2-15)}=0. \end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=0, \\ x^2+x-12=0, \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} D=25+56=81>0, \\ D=1+48=49>0, \end{array}\right.$ два корня

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{5\pm 9}{2}, \\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm 7}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=7, \\ x_2=-2, \\ x_3=3, \\ x_4=-4, \end{array}\right.$$

Ответ: $\{7;-2;3;-4\}$

Пример 5.

$$\frac{x(12x-11)}{5x+3}+\frac{4(4x+1)}{12x^2+1}=2$$, заметим, что 2 = 1 + 1, тогда

$$ОДЗ: x\neq -\frac{3}{5}; \pm\sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\frac{x(12x-11)}{5x+3}-1+\frac{4(4x+1)}{12x^2+1}-1=0$$

$$\frac{12x^2-11x-5x-3}{5x+3}+\frac{16x+4-12x^2-1}{12x^2+1}=0$$

$$\frac{12x^2-16x-3}{5x+3}-\frac{12x^2-16x-3}{12x^2+1}=0$$

$$\left(12x^2-16x-3\right)\left(\frac{1}{5x+3}-\frac{1}{12x^2+1}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}12x^2-16x-3=0,\\ \dfrac{12x^2-5x-2}{(5x+3)(12x^2+1)}=0.\end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим

$$\left[\begin{array}{l}12x^2-16x-3=0,\\ 12x^2-5x-2=0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}12x^2-18x+2x-3=0,\\ 12x^2-8x+3x-2=0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(2x-3)(6x+1)=0,\\ (3x-2)(4x+1)=0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=1{,}5,\\ x_2=-\dfrac{1}{6},\\ x_3=\dfrac{2}{3},\\ x_4=-\dfrac{1}{4},\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1{,}5;-\frac{1}{6};\frac{2}{3};-\frac{1}{4}\right\}$

Пример 6.

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4$$, заметим, что 4 = 2 + 2, тогда

$$ОДЗ: x\neq\frac{4}{7}; x^3\neq -2$$

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-2-\left(\frac{21x+22}{x^3+2}+2\right)=0$$

$$\frac{x^3-56x-20+35x}{4-7x}-\frac{21x+22-x^3-2}{x^3+2}=0$$

$$\frac{x^3-21x-20}{4-7x}+\frac{x^3-21x-20}{x^3+2}=0$$

$$(x^3-21x-20)\left(\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3-21x-20=0,\\ \dfrac{x^3-7x+6}{(4-7x)(x^3+2)}=0.\end{array}\right.$$

Так как дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается, получим:

$$\left[\begin{array}{l} x^3-21x-20=0,\\ x^3-7x+6=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3-25x+4x-20=0,\\ x^3-6x-x+6=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x(x-5)(x-5)+4(x-5)=0,\\ x(x^2-1)-6(x-1)=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-5)(x^2+4x+x+4)=0,\\ (x-1)(x^2+x-6)=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-5)(x+4)(x+1)=0,\\ (x-1)(x^2+3x-2x-6)=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-5)(x+4)(x+1)=0,\\ (x-1)(x+3)(x-2)=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=5,\\ x_2=-4,\\ x_3=-1,\\ x_4=1,\\ x_5=-3,\\ x_6=2,\end{array}\right.$$

Ответ: $\{5;-4;-1;-3;2\}$

3. Решение систем уравнений.

Рассмотрим примеры решения нестандартных систем алгебраических уравнений, которые нельзя разделить на типы и объяснить, как каждый из типов нужно решать.

Пример 1.

$$\begin{cases}(x+y)^2-z^2=4,\\(y+z)^2-x^2=2,\\(z+x)^2-y^2=3,\end{cases}$$

$$+\begin{cases}x^2+2xy+y^2-z^2=4,\\y^2+2yz+z^2-x^2=2,\\z^2+2xz+x^2-y^2=3,\end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=9,$$
$$(x+y+z)^2=9,$$
$$x+y+z=\pm3,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=3,\\(x+y+z)(x+y-z)=4,\\(y+z+x)(y+z-x)=2,\\(z+x+y)(z+x-y)=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+z=-3,\\(x+y+z)(x+y-z)=4,\\(y+z+x)(y+z-x)=2,\\(z+x+y)(z+x-y)=3,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=3,\\x+y-z=\dfrac{4}{3},\\y+z-x=\dfrac{2}{3},\\z+x-y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=z=-3,\\x+y-z=-\dfrac{4}{3},\\y+z-x=-\dfrac{2}{3},\\z+x-y=-1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=3,\\2y=2,\\2x=\dfrac{7}{3},\\2z=\dfrac{5}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+z=-3,\\2x=-2,\\2x=-\dfrac{7}{3},\\2z=-\dfrac{5}{3},\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=3,\\y=1,\\x=\dfrac{7}{6},\\z=\dfrac{5}{6},\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+z=-3,\\y=-1,\\x=-\dfrac{7}{6},\\z=-\dfrac{5}{6},\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{7}{6};1;\frac{5}{6}\right);\left(-\frac{7}{6};-1;-\frac{5}{6}\right).$

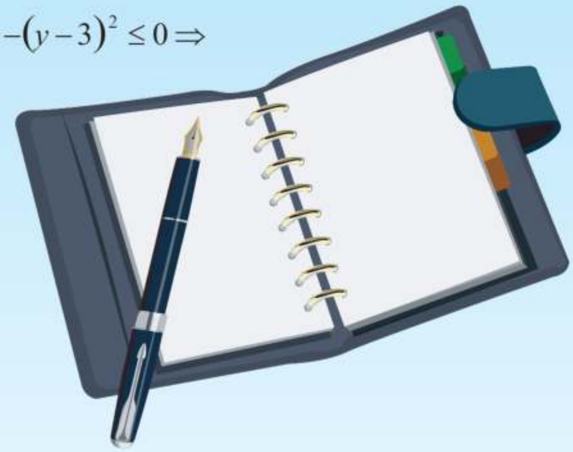
Пример 2.

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7+0, \end{cases}$$

$$x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0,$$

$$x^2+x(2-2y)+2y^2-8y+10=0,$$

$$D_1=1-2y+y^2-2y^2+8y-10=-y^2+6y-9=-(y-3)^2\le 0 \Rightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l} (y-3)^2=0, \\ x=\dfrac{-(2-2y)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y-3=0, \\ x=y-1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=3, \\ x=2, \end{array}\right.$$

Ответ: (2;3)

Пример 3.

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x+y)(x-y)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40. \end{cases}$$

Так как $x-y\neq 0$, то

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\frac{16}{40},$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{2}{5},$$

$$5x^2+10xy+5y^2=2x^2+2y^2,$$

$$3x^2+10xy+3y^2=0,$$

$$3x^2+9xy+xy+3y^2=0,$$

$$(3x+y)(x+3y)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{y}{3}, \\ x=-3y, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{y}{3}, \\ \left(-\dfrac{y}{3}-y\right)\left(\dfrac{y^2}{9}+y^2\right)=40, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3y, \\ (-3y-y)(9y^2+y^2)=40, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{y}{3}, \\ -\dfrac{40}{27}y^3=40, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3y, \\ -40y^3=40, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{y}{3}, \\ y=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3y, \\ y=-1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1;–3);(3;–1)

Пример 4.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ \left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \left(xy + y^2\right) + \left(2x + 4y\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ \left(x + y\right)^2 + y\left(x + y\right) + 2\left(x + 2y\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ \left(x + y\right)\left(x + 2y\right) + 2\left(x + 2y\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ \left(x + 2y\right)\left(x + y + 2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + 2y = 0, \\ x + y + 2 = 0, \end{array}\right. \\ x^2 - y^2 + 3y = 0, \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x = -2y, \\ x^2 - y^2 + 3y = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -2y, \\ 3y^2 + 3y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = -1, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \end{cases} \end{array}\right.$$

2. $\begin{cases} x - y - 2, \\ x^2 - y^2 + 3y = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -y - 2, \\ y^2 + 4y + 4 - y^2 + 3y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - 2, \\ y = -\dfrac{4}{7}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{7}, \\ x = -\dfrac{10}{7}, \end{cases}$$

Ответ: $(0;0);(2;-1);(-\frac{10}{7};-\frac{4}{7})$.

Пример 5.

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2x + y = 7, \\ y^2 + xy + x + 2y = 11, \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, получим

$$\left(x + y\right)^2 + 3\left(x + y\right) - 18 = 0,$$

$D = 9 + 72 = 81 > 0$, два корня

$$\left[\begin{array}{l} \left(x + y\right)_1 = \dfrac{-3 + 9}{2}, \\ \left(x + y\right)_2 = \dfrac{-3 - 9}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(x + y\right)_1 = 3, \\ \left(x + y\right)_2 = -6, \end{array}\right.$$

$$x^2 - y^2 + x - y + 4 = 0,$$

$$\left(x - y\right)\left(x + y\right) + \left(x + y\right) + 4 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -6, \\ -6\left(x - y\right) + \left(x - y\right) + 4 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ 3\left(x - y\right) + \left(x - y\right) + 4 = 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} + \begin{cases} x + y = -6, \\ x - y = \dfrac{4}{5}, \end{cases} \\ + \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2{,}6, \\ y = -3{,}4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (-2,6;-3,4);(1;2).

Пример 6.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 4x + 4y = 5, \\ 5x^2 - 3y^2 + 10x - 12y = -15. \end{cases}$$

Сложим второе уравнение с первым, умноженным на 3. Получим квадратное уравнение относительно x:

$$11x^2 + 22x = 0,$$
$$x(x+2) = 0.$$

Вычтем из первого уравнения, умноженного на 2,5, второе. Получим квадратное уравнения относительно y:

$$5{,}5y^2 + 22y = 27{,}5,$$
$$5{,}5y^2 + 22y - 27{,}5 = 0,$$
$$11y^2 + 44y - 55 = 0,$$
$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$

$D_1 = 4 + 5 = 9 > 0$, два корня

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = -2 + 3, \\ y_2 = -2 - 3, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 1, \\ y_2 = -5, \end{array}\right.$$

$$(y-1)(y+5) = 0.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} x(x+2) = 0, \\ (y-1)(y+5) = 0, \end{cases}$$

Из которой получим

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1, \end{cases}$$

Ответ: (0;-5);(0;1);(-2;-5);(-2;1).

4. Уравнения и их системы в олимпиадах разного уровня.

Пример 1.

Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-5x+4}-\sqrt{6x^2-x-8}+x^2-16=0$$

ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x^2-5x+4\ge 0 \\ x^2-6x+8\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-4)\ge 0 \\ (x-2)(x-4)\ge 0 \end{cases}$$

$x=4$

ОДЗ состоит из единственной точки $x = 4$

Проверим, является ли $x = 4$ решением:

$\sqrt{0}-\sqrt{0}+16-16=0$. Значит, $x = 4$ единственное решение.

Ответ: $\{4\}$

Пример 2.

Решите уравнение

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$$

ОДЗ: $x+2\neq 0,\ x\neq -2$

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2-\frac{4x^2}{x+2}+\frac{4x^2}{x+2}=5$$

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2-\frac{4x^2}{x+2}-5=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\frac{x^2}{x+2}-5=0$$

Пусть $\dfrac{x^2}{x+2}=t$, тогда $t^2+4t-5=0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-5 \\ t_1=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+2}=1 \\ \dfrac{x^2}{x+2}=-5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2+5x+10=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ D<0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;2\}$

Пример 3.

Решите уравнение

$(x^2+2x+3)(2x^2+4x+3) = 2$

Выделяя полные квадраты, перепишем исходное выражение в виде:

$((x+1)^2+2)(1+2(x+1)^2) = 2$

Так как $(x+1)^2 \geq 0$, то $(x+1)^2 \geq 2$ и $1+2(x+1)^2 \geq 1$, то поэтому

$(x^2+2x+3)(2x^2+4x+3) \geq 2$

Равенство в этом нестрогом неравенстве может достигаться лишь когда:

$$\begin{cases} (x+1)^2+2=2 \\ 1+2(x+1)^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2=0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

$x = -1$

Ответ: $\{-1\}$

Пример 4.

Решите уравнение

$|\sqrt{x^2-x}-x| + |x+\sqrt{x}| = \sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}$

Пусть $a = \sqrt{x^2-x}-x$, $b = x+\sqrt{x}$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$|a| + |b| = a + b$

Из свойств абсолютной величины вытекает, что последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда одновременно $a \geq 0$, $b \geq 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x}-x \geq 0 \\ x+\sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}) \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{0\}$

Пример 5.

Решите уравнение

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$

Пусть $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$. Тогда $t^2 = x-1$, следовательно, $x = t^2+1$. Уравнение примет вид

$t+\sqrt{t^2+1-2t}=1$

$t+\sqrt{(t-1)^2}=1$

$t+|t-1|=1$

Разберем варианты раскрытия модуля:

1) $0 \le t \le 1$; $|t-1| = -(t-1) = -t+1$; $t+1-t$; $1 = 1$

2) $t > 1$; $t + t - 1 = 1$; $t = 1 \notin (1;+\infty)$

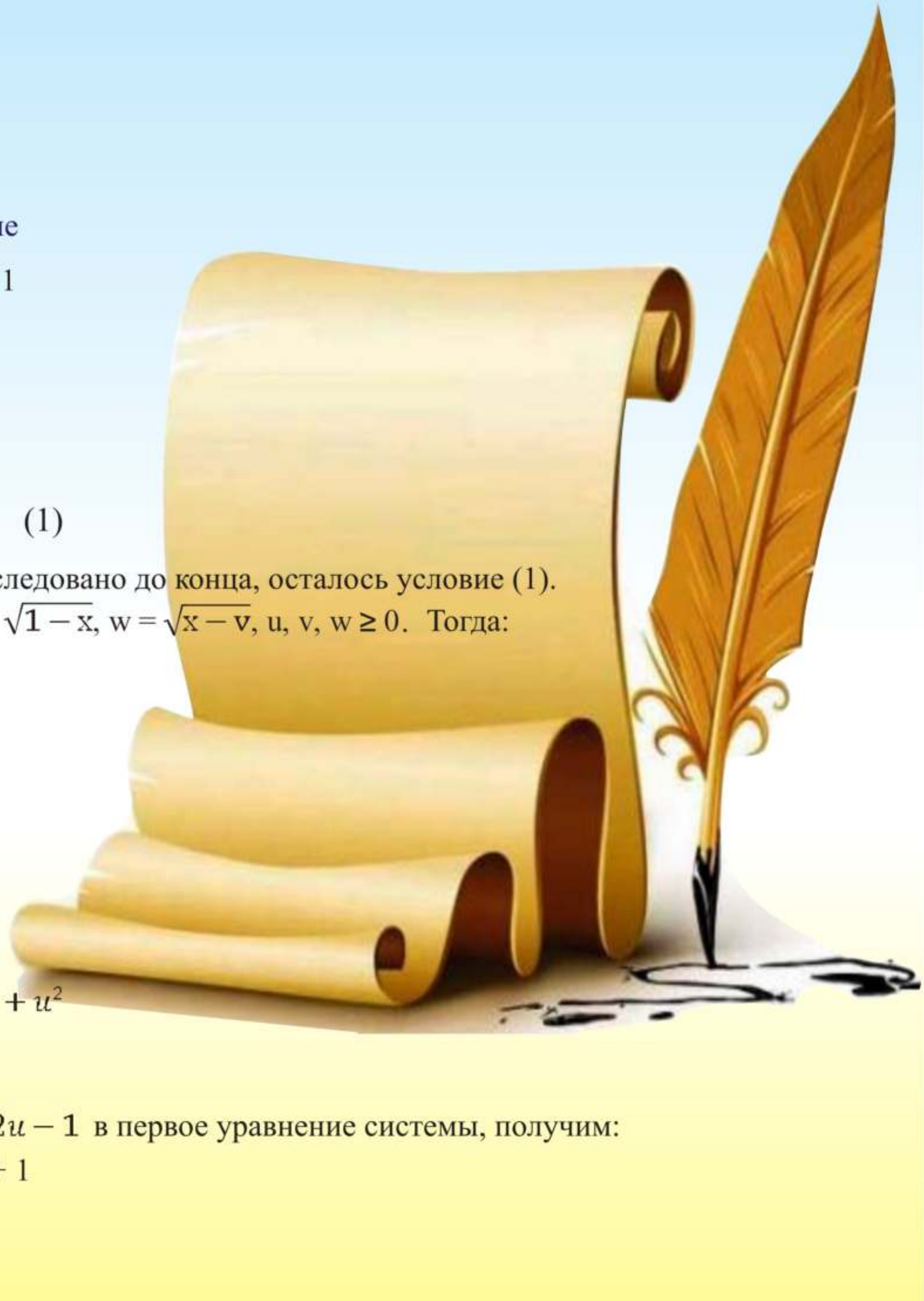
Тогда $0 \le t \le 1$, значит $0 \le \sqrt{x-1} \le 1$

Решим последнее неравенство, учитывая, что неравенство можно возводить в квадрат, только когда его части неотрицательны. В данном случае все в порядке:

$0 \le x - 1 \le 1$

$1 \le x \le 2$

Ответ: $x \in [1;2]$



Пример 6.

Решите уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x\sqrt{1-x}} = 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ x - \sqrt{1-x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - \sqrt{1-x} \ge 0 \end{cases} \quad (1)$$

Итак, ОДЗ не исследовано до конца, осталось условие (1).

Пусть $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{1-x}$, $w = \sqrt{x-v}$, $u, v, w \ge 0$. Тогда:

$$\begin{cases} u + w = 1 \\ x = u^2 \\ 1 - x = v^2 \\ x - v = w^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + w = 1 \\ 1 - u^2 = v^2 \\ u^2 - v = w^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = 1 - u \\ 1 - u^2 = v^2 \\ u^2 - v = 1 - 2u + u^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - u^2 = v^2 \\ v = 2u - 1 \end{cases}$$

Подставим $v = 2u - 1$ в первое уравнение системы, получим:

$1 - u^2 = 4u^2 - 4u + 1$

$5u^2 - 4u = 0$

$5u\left(u - \frac{4}{5}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{16}{25} \end{array}\right.$$

Корень x=0 не удовлетворяет условию (1). Действительно, 0 – 1 ≥ 0 – не верно.

При $x = \frac{16}{25}$ уравнение примет вид:

$$\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{16}{25}-\sqrt{1-\frac{16}{25}}}=\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{16}{25}-\sqrt{\frac{9}{25}}}=\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{16}{25}-\frac{3}{5}}=\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$$

$x = \frac{16}{25}$ – корень уравнения

Ответ: $\left\{\frac{16}{25}\right\}$

Пример 7.

Решите уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+\ 3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

Принимаем решение не исследовать ОДЗ, а ограничиться последующей проверкой.

Пусть $t=\sqrt{2x-5}$, $t\geq 0$. Тогда , $t^2=2x-5$, $x=\frac{t^2+2}{2}$

Уравнение принимает вид:

$$\sqrt{\frac{t^2+5}{2}-2+t}+\sqrt{\frac{t^2+5}{2}+2+3t}=7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{t^2+2t+1}{2}}+\sqrt{\frac{t^2+6t+9}{2}}=7\sqrt{2}\ \Big|\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14$$

$$\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=14$$

$$|t+1|+|t+3|=14$$

Т.к. $t\geq 0$, то $t+1>0$ и $t+3>0$, получаем:

$t+1+t+3=14$

$2t+4=14$

$2t=10$

$t=5$

$5=\sqrt{2x-5}$

$25=2x-5$

$30=2x$

$x=15$

Проверка:

При x = 15 исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{13+5}+\sqrt{17+3\times 15}=\sqrt{18}+\sqrt{32}=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

Значит, x = 15 – корень уравнения.

Ответ: $\{15\}$

Пример 8.

Решите уравнение

$(x^2 - x - 1)^3 + (2x^2 - x - 7)^3 = (3x^2 - 2x - 8)^3$

Введем обозначения $a = x^2 - x - 1$, $b = 2x^2 - x - 7$, $a + b = x^2 - x - 1 + 2x^2 - x - 7 = 3x^2 - 2x - 8$, тогда уравнение примет вид:

$$a^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = 0$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2) = 0$$

$$a + b = 0 \qquad -3ab = 0$$

$$a = -b \text{ или } a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad 2x^2 - x - 7 = 0 \qquad 3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4} \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}, 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4}.$

Пример 9.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + xy + = 20y \\ 4xy + y^2 = 5x \end{cases}$$

1)Заметим, что пара (0;0) является решением системы

2)Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$

$$\begin{cases} x(4x + y) = 20y \\ y(4x + y) = 5x \end{cases}$$

$$\frac{x(4x+y)}{y(4x+y)} = \frac{20y}{5x}$$

$$\frac{x}{y} = 4\frac{y}{x}$$

Пусть $\frac{x}{y} = t, t \neq 0$

$$t - 4 \times \frac{1}{t} = 0$$

$$t^2 - 4 = 0$$

$$t = \pm 2$$

$\frac{x}{y} = 2$ или $\frac{x}{y} = -2$, откуда $x = 2y$ или $x = -2y$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ 4 \times 2y \times y + y^2 = 5 \times 2y \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y \\ 4 \times (-2y) \times y + y^2 = 5 \times (-2y) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{20}{9} \\ y = \frac{10}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{20}{7} \\ y = \frac{10}{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0;0), $\left(\frac{20}{9}; \frac{10}{9}\right)$, $\left(-\frac{20}{7}; -\frac{10}{7}\right)$.

Пример 10.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + x + y = 6 \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - y = 2 \end{cases}$$

Разложим выражение $2x^2 - xy - 3y^2$ на множители, рассмотрев уравнение $2x^2 - xy - 3y^2 = 0$ как квадратное относительно переменной x, тогда

$D = y^2 - 4 \times 2 \times (-3y^2) = 25y^2 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{y \pm 5y}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -y \\ x_2 = \frac{3}{2}y \end{array}\right.$$

Следовательно, $2x^2 - xy - 3y^2 = (x + y)(2x - 3y)$

Разложим выражение $2x^2 - 5xy + 3y^2$ на множители, рассмотрев уравнение $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$ как квадратное относительно переменной x, тогда

$D = 25y^2 - 4 \times 2 \times 3y^2 = y^2 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{5y \pm y}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2}y \\ x_2 = y \end{array}\right.$$

Следовательно, $2x^2 - 5xy + 3y^2 = (2x - 3y)(x - y)$

Значит данную систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases}(x+y)(2x-3y)+(x+y)=6\\(x-y)(2x-3y)+(x-y)=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)(2x-3y+1)=6\\(x-y)(2x-3y+1)=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+y)(2x-3y+1)}{(x-y)(2x-3y+1)}=\dfrac{6}{2}\\(x-y)(2x-3y+1)=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}=3\\(x-y)(2x-3y+1)=2\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $x + y = 3(x - y)$, $x + y = 3x - 3y$, $2y = x$.

Подставив полученные значения во второе выражение получим:

$$y(y+1)-2=0 \qquad \left[\begin{array}{l}y_1=-2\\y_2=1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-4\\y_1=-2\end{cases}\\\begin{cases}x_2=2\\y_2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$y^2+y-2=0$$

Ответ: (– 4; –2), (2:1)

Пример 11.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2-5xy+2y^2=0\\x^2+4xy-3y^2=1\end{cases}$$

В данной системе $y \neq 0$, т.к., если предположить, что $y = 0$, то из первого уравнения системы находим $x = 0$, но пара (0;0) не удовлетворяет второму уравнению системы.

$$3x^2-5xy+2y^2=0 \,|: y^2 \neq 0$$

$$3\frac{x^2}{y^2}-5\frac{xy}{y^2}+2=0$$

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\frac{x}{y}+2=0$$

Введем обозначение $t = \dfrac{x}{y}$, тогда

$$3t^2-5t+2=0,\quad t_1=1,\quad t_2=\frac{2}{3}$$

Таким образом $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$ или $\dfrac{x}{y}=1$, следовательно, задача свелась к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}y\\x^2+4xy-3y^2=1\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases}x=y\\x^2+4xy-3y^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{3}y^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{9}y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 + 4y^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2; 3), (-2; -3), (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Пример 12.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

$$13x^2 - 39xy + 13y^2 + 3x^2 - xy + 3y^2 = -0$$

$$16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0 \,|: 4y^2 \neq 0$$

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 4 = 0$$

Пусть $t = \frac{x}{y}$

$$4t^2 - 10t + 4 = 0 \,|: 2$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{5-3}{4}$$

$$t_1 = 2 \qquad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - 6y^2 + y^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 6x^2 + 4x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\x=1\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (–1; –2), (1; 2), (–2; –1), (2; 1).

Пример 13.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}xy+24=\dfrac{x^3}{y}\\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}\end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$

В данном примере удобнее всего применить почленное перемножение уравнений, в результате которого получим:

$(xy + 24)(xy - 6) = \dfrac{x^3}{y} \times \dfrac{y^3}{x}$

$x^2y^2 - 6xy + 24xy - 144 = x^2y^2$

$18xy = 144$

$xy = 8.$

Следовательно, система примет вид:

$$\begin{cases}xy=8\\ \dfrac{y^3}{x}=2\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{8}{y}\\ y^4=16\end{cases} \quad \begin{cases}x=\pm4\\ y=\pm2\end{cases}$$

Ответ: (–4; –2), (4; 2).

Пример 14.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-6y^2-xy-2x+11y=3\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы, как квадратное относительно x:

$x^2-(y+2)x-6y^2+11y-3=0$

решение которого осуществляем традиционным способом:

$D = (y+2)^2 - 4(-6y^2 + 11y - 3) = (5y-4)^2$

Следовательно, $x_{1,2} = \dfrac{y + 2 \pm |5y-4|}{2}$, откуда $x_1 = 3y - 1$, $x_2 = 3 - 2y$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности достаточно простых систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x = 3y - 1\\ x^2 + y^2 = 5\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x = 3 - 2y\\ x^2 + y^2 = 5\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases}x = 3y - 1\\ x^2 + y^2 = 5\end{cases}$

$\begin{cases}x = 3y - 1\\ 3y^2 - 6y + 1 + y^2 = 5\end{cases}$

$\begin{cases}x = 3y - 1\\ 10y^2 - 6y - 4 = 0\end{cases}$

$\begin{cases}x = 3y - 1\\ D = 14^2\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 = 2\\ y_1 = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x_2 = -2{,}2\\ y_2 = -0{,}4\end{cases}\end{array}\right.$

(2): $\begin{cases}x = 3 - 2y\\ x^2 + y^2 = 5\end{cases}$

$\begin{cases}x = 3 - 2y\\ 9 - 12y + 4y^2 + y^2 = 5\end{cases}$

$\begin{cases}x = 3 - 2y\\ D = 8^2\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 = -1\\ y_1 = 2\end{cases}\\ \begin{cases}x_2 = 2{,}2\\ y_2 = 0{,}4\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: (–2,2; –0,4), (2,2; 0,4), (–1; 2), (2; 1).

Пример 15.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x + y = 13\\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 16y + 89} = 5\end{cases}$$

Выделим под знаком каждого корня квадраты двучленов, относительно переменных x и y, получим систему:

$$\begin{cases}2x + y = 13\\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5\end{cases}$$

Второе уравнение системы означает, что сумма расстояний от точки M (x;y) до точек A (2;4) и B (5;8) равна 5, при этом, AM + BM ≥ AB; расстояние AB = $\sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = 5$, отсюда следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда точка M будет лежать на отрезке AB, т.е. ее координаты будут удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки A и B.

Составим уравнение этой прямой:

$y = kx + b$, A (2;4), B (5;8) $\quad -\begin{cases}4 = 2k + b,\\ 8 = 5k + b,\end{cases}$ $\quad 4 = 3k$, $k = \frac{4}{3}$ и $4 = 2\times\frac{4}{3} + b$, $4 - \frac{8}{3} = b$, $b = \frac{4}{3}$

Это уравнение имеет вид $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$. При этом $x \in [2; 4]$, $y \in [5;8]$.

Итак, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} & |\cdot 3 \\ 2x + y = 13 & |\cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3y - 4x - 4 = 0 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 30 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ x = 3{,}5 \end{cases}$$

Ответ: (3,5; 6)

Пример 16.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 11 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 4y + 53} = 5 \end{cases}$$

Выделим под знаком каждого корня квадраты двучленов относительно переменных x и y, получим систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 11 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5 \end{cases}$$

Второе уравнение системы означает, что сумма расстояний от точки M (x;y) до точек A (3;-1) и B (7;2) равна 5, при этом $AM + BM \geq AB$; расстояние AB =

$\sqrt{(7-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$

Отсюда следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда точка M будет лежать на отрезке AB, т.е. ее координаты будут удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки A и B.

Составим уравнение этой прямой:

$y = kx + b$, A (3;–1), B (7;2)

$$-\begin{cases} -1 = 3k + b, \\ 2 = 7k + b, \end{cases}$$

$3 = 4k$

$k = \frac{3}{4}$

и

$3k + b = -1$

$3 \times \frac{3}{4} + b = -1$

$\frac{9}{4} + b = -1$

$b = -1 - \frac{9}{4}$

$b = -3\frac{1}{4}$

Это уравнение имеет вид: $y = \frac{3}{4}x - 3\frac{1}{4}$

Итак, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 3\frac{1}{4} \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$2x + 2(\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{4}) = 11$$

$$2x + \frac{3}{2}x - 6\frac{1}{2} = 11$$

$$3{,}5x = 17{,}5$$

$$x = 5$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{3}{4} \times 5 - 3\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{15}{4} - \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(5; \frac{1}{2})\right\}$.

Пример 17.

Решите уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$$

Пусть $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}\right) - \frac{8}{3}$, след – но,

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3t^2 + 8$$

$$3t^2 + 8 = 10t$$

$$3t^2 - 10t + 8 = 0$$

$$D_1 = 25 - 24 = 1$$

$$t = \frac{5 \pm 1}{3}$$

$$t_1 = \frac{4}{3}, \; t_2 = 2$$

Вернемся к замене:

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}, \; x \neq 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$D_1 = 16$$

$$x_{1,2} = 2 \pm 4,$$

$$x_1 = -2, \; x_2 = 6.$$

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2, \; x \neq 0$$

$$x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$D_1 = 21$$

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}$$

Ответ: $\{-2; 6; \; 3 \pm \sqrt{21}\}$.

Пример 18.

Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $y \neq 0$, следовательно, $x = \dfrac{4+z^2}{2y}$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы:

$$\frac{4+z^2}{2y}+y+z=2$$

$$4+z^2+2y^2+2yz=4y$$

$$z^2+2yz+2y^2-4y+4=0$$

Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно z:

$D_1 = y^2-2y^2+4y-4 = -(y-2)^2$

Так как корни действительные, то $D_1 \geq 0$, следовательно $y = 2$.

Тогда $z^2+4z+4=0$, откуда $z = -2$, $x = 2$.

Ответ: (2; 2; -2).

Пример 19.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 5\dfrac{y^2}{x} = \dfrac{6}{y} \\ y^3 - 5\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{6}{x} \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$, то разделим первое уравнение на x, а второе на y. Получим:

$$\begin{cases} x^2 - 5\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{6}{xy} \\ y^2 - 5\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{6}{xy} \end{cases}$$

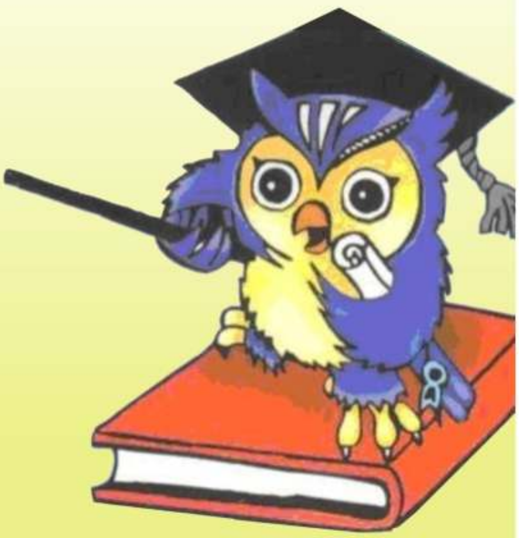
Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$x^2-y^2-5\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)=0$$

$$x^2-y^2-5\frac{y^4-x^4}{x^2y^2}=0$$

$$x^2-y^2+5\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y^2}=0$$

$$(x^2-y^2)\left(1+\frac{5(x^2+y^2)}{x^2y^2}\right)=0$$



Так как $1+\frac{5(x^2+y^2)}{x^2y^2} \neq 0$, то следовательно, $x^2-y^2=0, x=\pm y$.

1) $x=y$, тогда $x^2-5=\frac{6}{x^2}$, $x^4-5x^2-6=0$

Пусть $x^2=t$, $t>0$, $t^2-5t-6=0$, $t_1=-1$ и $t_2=6$

Обратная замена: $x^2=6$, $x=\pm\sqrt{6}$.

$(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$, $(\sqrt{6};\sqrt{6})$

2) $x=-y$, тогда $x^2-5=-\frac{6}{x^2}$, $x^4-5x^2+6=0$

Пусть $x^2=t$, $t>0$, тогда $t^2-5t-6=0$, $t_1=2$ и $t_2=3$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2=3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

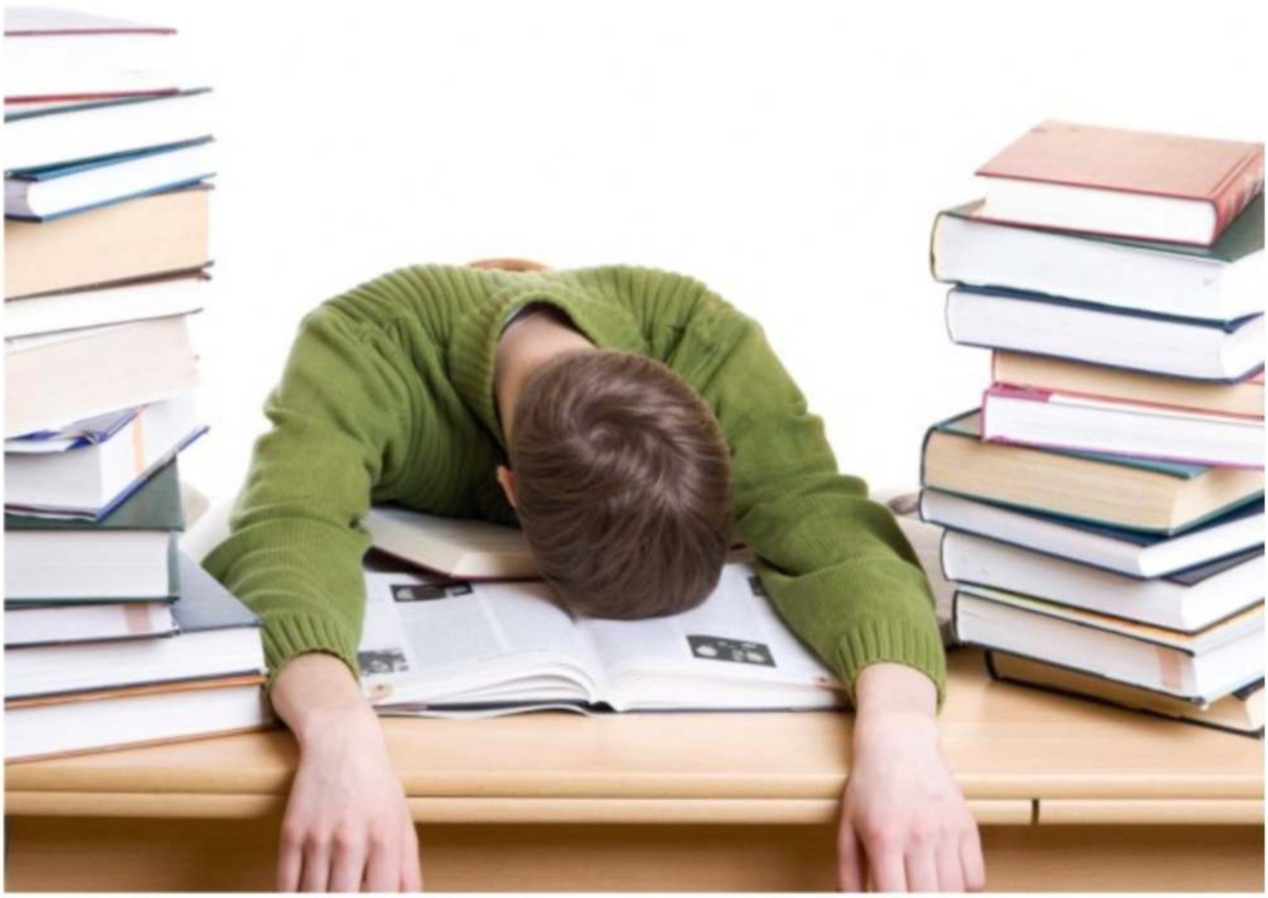
Ответ: $(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$, $(\sqrt{6};\sqrt{6})$, $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

IV. Заключение

Как вы обычно решаете задачи? После записи решения принято его проверить или даже выполнить заново отдельные операции. И иногда уже после переписывания на чистовик нам в голову ударяет мысль: ой, в формуле перепутал знак! Если это домашняя работа, некоторые все зачеркивают (получается грязновато), а более аккуратные школьники забеливают неверные строки. Решение начинается заново…

А что делать на ЕГЭ? Там исправления недопустимы. Любая описка или элементарная арифметическая ошибка сводит всю задачу на нет, так как в бланк вписывается только ответ. И времени на дополнительную проверку тоже нет. Вывод: нужно научиться решать предложенные задачи быстро, оптимально и без ошибок. Рассматривая различные нестандартные способы решения заданий, я оттачиваю навыки высокоэффективных подходов к решению целых классов задач.

Работая над этим творческим проектом, я смог найти для себя интересные задачи, а главное, открыть неизвестные мне ранее «элегантные» методы решений, что помогло мне подготовится к олимпиадам различного уровня и начать выстраивать дорогу к успешной сдаче ЕГЭ.



V. Содержание:

I. Введение. 3

II. Основные понятия. 4

1. Уравнение. 4
2. Линейные уравнения. 4
3. Квадратные уравнения. 5

III. Нестандартные приемы решения уравнений и их систем. 7

1. Решение рациональных уравнений. 7
2. Решение дробно-рациональных уравнений. 12
3. Решение систем уравнений. 18
4. Уравнения и их системы в олимпиадах разного уровня. 22

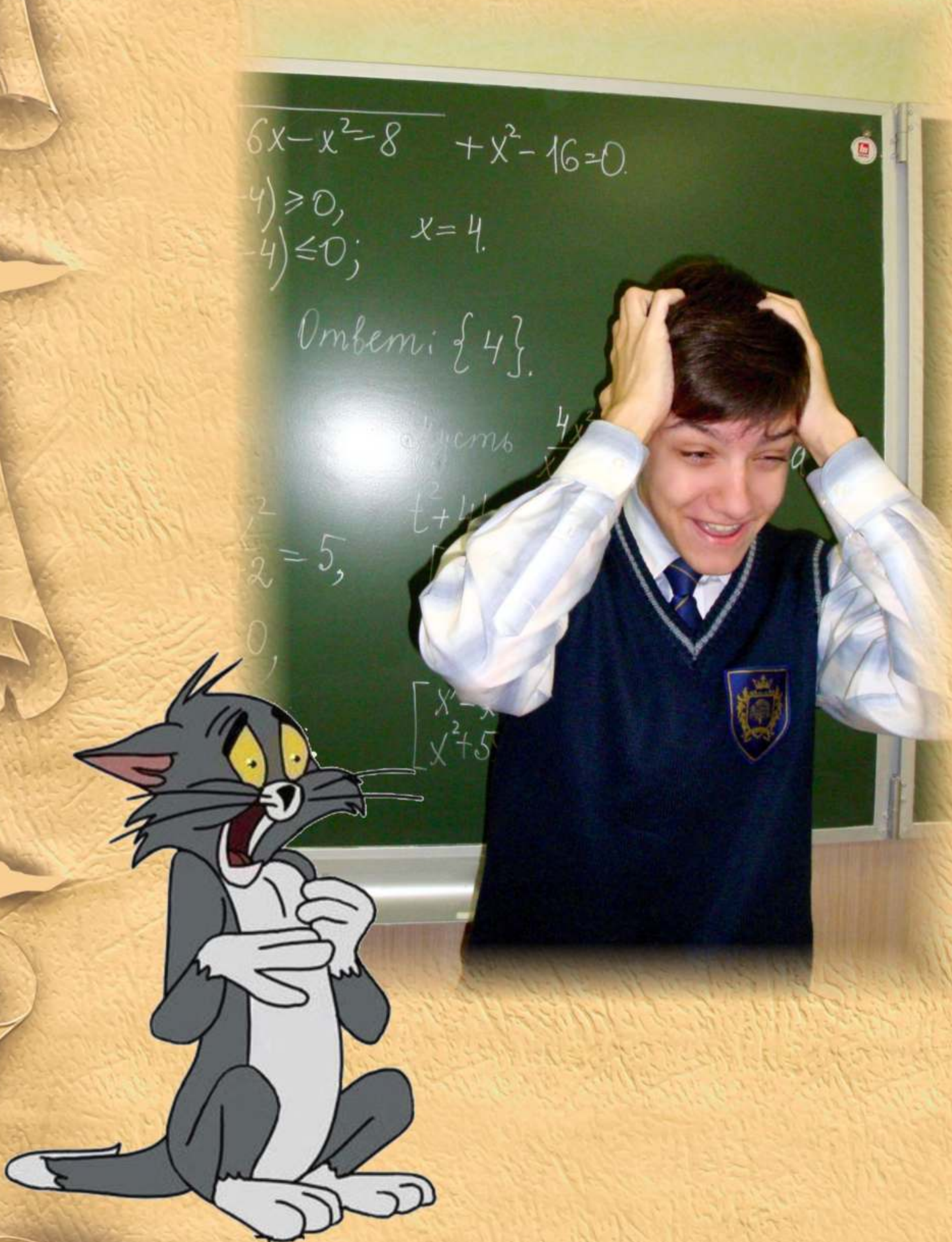
IV Заключение. 36

V. Содержание. 37

VI. Литература. 38

VI. Литература:

1. Иванов М.А. Математика без репетитора: 800 задач с ответами и решениями для абитуриентов. – М.: Вентана – Граф, 2002. – 320 с.
2. Э.Г. Гельфман, Ю.Ю. Вольфенгаут и др. Квадратные уравнения: Учебное пособие по математике для 8-го класса. – Томск: Изд-во Том. Ун-та. – 276 с.
3. Балаян Э.Н. Практикум по решению задач. Рациональные уравнения, неравенства и системы. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 125 с.
4. Кривоногов В.В. Нестандартные задания по математике: 5-11 классы. – М.: Издательство «Первое сентября», 2003. – 224 с.
5. А.А. Халиуллин «можно решать проще!». – Журнал «Математика в школе», №8, 2003, с. 46-48.
6. Газета «Математика», №10, 2005, с. 11-15.
7. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам. Учебное пособие А.Д. Баев, А.В. Глушко, О.К. Плетнева, А.С. Рябенко. – Воронеж: ВОИПКРО, 2011 – 191с.
8. Региональные олимпиады по математике. Материалы для подготовки участников / составители. А.Д. Баев, А.В. Глушко. – Воронеж 2004г.
9. Московские математические олимпиады 1993 – 2005г. Р.М. Федоров и др. под ред. В.М. Тихомирова. – М.:МЦНМО, 2006 – 456с.
10. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский; [под общ. ред. С.И. Демидовой, И.И. Колисниченко] – М.: Просвещение, 2009 – 159с.
11. Олимпиады по математике. Пособие / Т.Е. Бондаренко, И.Н. Данкова, Л.Л. Емелина, О.В. Занина, О.К. Плетнева – Воронеж, 2004 – 62с.


+x²−16=0.
x = 4.
Ответ: {4}.