МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ГИМНАЗИЯ им. Академика Н. Г. БАСОВА при ВГУ

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА
ПО ТЕМЕ:

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДАЛЁКОГО ПРОШЛОГО»

Выполнил: Когтев Никита Михайлович, ученик 7 «д» класса

Преподаватель-руководитель: Балыкина Людмила Александровна, учитель математики I КК

Воронеж 2012

В истории математики есть немало красивых и полезных открытий, каждый раз восхищающих поколения учеников.

Г. Александров

I. Введение.

Очень интересно и занимательно было вникнуть в математический мир древних веков. Очень удивительно, что те аксиомы, теоремы и формулы были определены и доказаны учеными много веков назад, а мы до сих пор пользуемся и берем за основу все их математические выводы. Конечно, математика значительно продвинулась вперед! Чего только стоит появление компьютеров! И когда я разбирал старинные задачи, вникал в их суть и прорешивал, я сделал вывод: ученые того времени чаще всего решали задачи с помощью уравнений, а мы сейчас решаем задачи арифметическим способом, который позволяет нам найти результат более коротким путем, что позволяет учащимся развивать логическое мышление.

Не зря знаменитый немецкий математик Карл Гаусс сказал: «Математика-царица всех наук». Она формирует такие качества человека, как: сообразительность, аккуратность, настойчивость, внимательность, критичность и многое другое. Решение математических задач развивают, помимо пространственного воображения, и способность догадываться, угадывать заранее результат, способность разумно искать правильный путь в самых необычных и запутанных условиях.

Еще в древние века математика занимала основное место в умах ученых и благодаря сохранившимся рукописям, у нас есть возможность проследить за развитием математической мысли, возможность прорешать старинные задачи и сравнить их решение с современным рассуждениями и выкладками.

Тема над которой я работал, помогла мне понять математику еще более глубже . И к тому же я понял, насколько легче производить вычисления, зная формулы. Ученые древности могли, не пользуясь справочными пособиями, формулами, находить правильное решение. Мы можем делать также, но ленимся. Любая задача разрешима, если мы умеем мыслить.

Понятие о числах формировалось постепенно и осложнялось неумением первобытного человека отделять числовую абстракцию от ее конкретного представления. Из-за этого счет долго оставался только вещественным: использовались пальцы, камешки, пометки. Затем появилась идея считать не только единицами, но и, так сказать, пакетами единиц, содержащими, например, 10 объектов. Это нашло отражение в языке, а затем и в письменности. Для запоминания результатов счета делали зарубки, узелки и т.п. С изобретением письменности стали использовать буквы или особые значки для сокращенного изображения больших чисел.

Представленные нами задачи проведут вас через разные века и страны, и вы невольно соприкоснетесь с древней историей давно ушедших цивилизаций. Вы сможете мысленно перенестись за много-много сотен и тысяч веков назад от нашего времени. Опыт показывает, что решение старинных задач вызывает интерес к математике, побуждает к самостоятельному творчеству, проявлению инициативы и смекалки, дает естественный повод для небольших исторических экскурсов о их составителях, которые, как правило, были крупнейшими математиками своей эпохи, и о состоянии математических дисциплин далекого прошлого.

II. Занимательные задачи далекого прошлого

1. Математическая мысль Древнего Египта и Вавилона

Наиболее древние письменные математические тексты датируются примерно началом II тысячелетия до нашей эры. Математические документы сохранились только в Египте, Вавилоне, Китае и Индии. Около 5 тысяч лет назад при фараоне Джосере был признан богом мудрости великий врачеватель, государственный деятель и первый известный нам по имени математик Имхотеп.

Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на папирусах. Денежных расчетов, как и самих денег, в Египте не было. Еще 4 тысячи лет назад они решали практические задачи по арифметике, алгебре и геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями. Высшим достижением египетской математики является точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием.

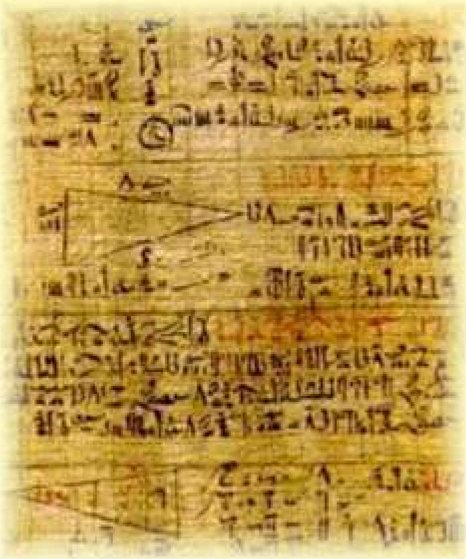
Например, в Британском музее хранится задача из папируса Ринда (его называли также папирусом Ахмеса), относящегося к периоду 2000-1700гг.до н.э..

«Найти число, если известно, что от прибавления к нему 2/3 его и вычитания от полученной суммы ее трети, получается число 10».

Решение этой задачи сводится к решению линейного уравнения:

$$x+(2/3)x-(1/3)(x+2/3x)=10,$$
$$x+(2/3)x-(1/3)x-(2/9)x=10,$$
$$x+(3x-2)/9=10,$$
$$(10/9)x=10,$$
$$x=9.$$

Ответ: 9

Задачи из папируса Ахмеса.

Современная наука располагает сравнительно небольшим числом египетских математических документов – около пятидесяти папирусов. Самым древним из них является «московский папирус» (5,44 м х 8 см), относящийся к эпохе 1850 г. до н.э. и содержащий 25 задач с решениями. Он был приобретен в 1893 г. русским востоковедом В.С. Голенищевым, а в 1912 г. перешел в собственность Московского музея изобразительных искусств. Папирус расшифровал русский академик Б.А. Тураев в 1917 г., а детально он был изучен в 1927 г. советским академиком В.В. Струве.

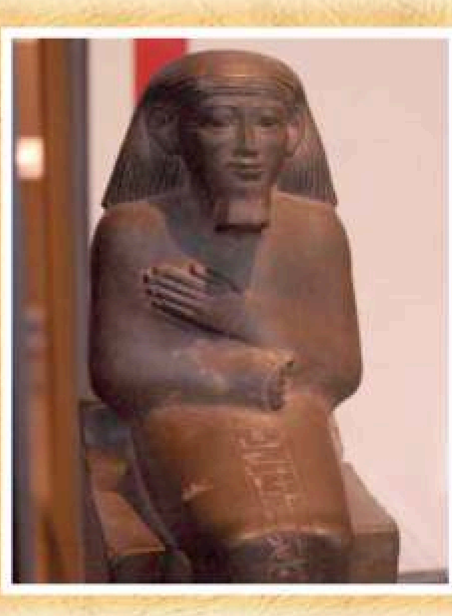
Самый большой сохранившийся до наших дней древнеегипетский математический текст – это так называемый папирус писца XVIII–XVII вв. до н.э. Ахмеса.

Папирус имеет размер 5.25 м х 33 см и содержит 84 задачи. Он был приобретен в 1858 году шотландским египтологом Генри Райндом и изучен впервые профессором Гейдельбергского университета Августом Эйзенлором в 1877 году.

Вот одна из задач Ахмеса (задача-путешественница):

У семи лиц по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?

Ответ: 7; 49; 343; 2401; 16807; 19607.



АХМЕС

(ок. 2000 до н. э.), египетский жрец и писец, составитель первого дошедшего до нас руководства по арифметике и геометрии (папируса Ринда).

Задача № 24 сборника Ахмеса

"Куча. Ее седьмая часть ('подразумевается: "дают в сумме") 19. Найти кучу."

Запись задачи нашими знаками:

$X+X/7=19$

Решение Ахмеса может быть представлено в наших символах в следующих четырех столбцах:

(куча) 7 1/7 ... 1	. 8 .. 16* 1/2 4 1/4 2* 1/8 1*	. 2 1/4 1/8 .. 4 1/2 1/4 .... 9 1/2 Куча 16 1/2 1/8	16 1/2 1/8 2 1/4 1/8 Вместе 19

Делается предположение, что. куча есть 7; тогда 1/7 ее часть есть 1. Это записано в первом столбце.

Во втором столбце записано, что при предположении x=7 куча и ее 1/7 часть дали бы 8 вместо 19. Удвоение предположения дает 16. Автор, в уме, очевидно, прикидывает, что дальше удваивать предположение нельзя, так как тогда получится больше 19. Он записывает 16, ставит перед числом две точки для обозначения удвоения первоначального предположения и отмечает значком (у нас - звездочкой) результат; для получения в сумме 19 первоначальное предположение надо умножить - на 2 с некоторым добавлением, так как для получения точного результата, 19, не хватает еще 19—16=3. Ахмес находит 1/2 от 8, получает 4. Так как это больше нехватки 3, то на 1/2 предположение умножить нельзя. Но 1/4 от 8 есть 2, 1/8 от восьми - 1. Ахмес видит, что 1/4 и 1/8 первоначального результата дают точно те 3 единицы, которых не хватало. Отметив 1/4 и 1/8 значками, Ахмес убедился, что первоначальное предположение для кучи (7) надо помножить на 2+1/4+1/8. Умножение числа 7 на смешанное число 2+1/4+1/8. Ахмес заменяет умножением смешанного числа 2+1/4+1/8 на 7. В третьем столбце выписаны: 1/7 часть искомой кучи есть 2+1/4+1/8, удвоенное это число: 2+1/4+1/8 и учетверенное: 9½. Сумма этих трех чисел, равная числу 16+1/2+1/8, есть произведение первоначального предположения 7 на 2+1/4+1/8.

Итак, куча равна 16+1/2+1/8.

В последнем столбце Ахмес делает проверку, складывая полученное значение для кучи 16+1/2+1/8 и его 1/7 части 2+1/4+1/8. В сумме получается 19, и решение заканчивается обычным для автора заключением: "Будет хорошо".

Способ решения, примененный Ахмесом, называется методом одного ложного положения. При помощи этого метода решаются уравнения вида ax = b. Его применяли как египтяне, так и вавилоняне.

Загадка из папируса Ринда.

Этот папирус, найденный в конце прошлого века англичанином Риндом, являет собой фрагмент другого более древнего египетского труда по математике, который относится, вероятно, к III тыс. до н.э..

Приведем две задачи из папируса Ринда:

Какой-то математик на-считал на выгоне 70 коров. «Какую часть от всего табуна составляют эти коровы?» - спросил математик у пастуха. «Я выгнал пастись две трети от трети всего табуна», - отвечал пастух. Сколько голов скота насчитывается во всем табуне?

Решение:

Пусть x – число голов скота во всем табуне. Тогда $(2/3)\times(1/3)x = 70$, откуда после эквивалентных преобразований $(2/9)x = 70$, $2x = 630$ находим: $x = 315$.

Значит, во всем табуне было 315 голов скота.

Ответ: 315 голов скота.

Встречаются в древнем папирусе и чисто формальные задачи, например следующая:

Найдите x

из уравнения

$$[(x+(2/3)x)+1/3(x+(2/3)x)]\times 1/3 = 10.$$

Решение:

$[(x + (2/3)x) + (1/3)x + (2/9)x] \times 1/3 = 10,$

$[(9/9)x + (6/9)x + (3/9)x + (2/9)x] \times 1/3 = 10,$

$(20/9)x \times 1/3 = 10,$

$x = (10\times 27)/20 = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

Математика Вавилона

глиняная плитка

В Древнем Вавилоне математика зародилась задолго до нашей эры. Вавилонские памятники в виде глиняных плиток (всего около 500 000, причем из них примерно лишь 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами) с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира. Расшифровкой и анализом клинописных текстов много занимались историки-математики Отто Нейгебауэр (1899–1990 гг.) и Франсуа (1872–1944 гг.). В этих текстах мы находим достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Вавилоняне были основоположниками астрономии, создали шестидесятиричную систему счисления, решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени при помощи специальных таблиц. Документальным свидетельством высокой вычислительной культуры служит и высказывание ассирийского царя Ашшурбанипала (VII в. до н. э.): «Я совершаю запутаннейшие деления и умножения…».
Надо отметить, что корни своей культуры вавилоняне в значительной степени унаследовали от шумеров.

2. Математическая мудрость Древнего Китая

иероглифы

Возникновение китайской цивилизации на берегах реки Хуанхэ относится к началу IIтыс. до н.э.. Сохранились обозначения цифр на гадательных костях животных XIVв. до н.э.. Цифры в древнем Китае обозначались специальными иероглифами, которые появились во II тысячелетии до н.э., и начертание их окончательно установилось к III веку до н.э.. Эти иероглифы применяются и в настоящее время. Китайский способ записи чисел изначально был мультипликативным. Например, запись числа 1946, используя вместо иероглифов римские цифры, можно условно представить как 1M9C4X6. Вычисления производились на специальной счетной доске суань-пань, по принципу использования аналогичной русским счётам. Ноль сначала обозначался пустым местом, специальный иероглиф появился около XII века н.э.. Для запоминания таблицы умножения существовала специальная песня, которую ученики заучивали наизусть.

Среди важнейших достижений китайской математической мысли отметим следующие: правило двух ложных положений, введение отрицательных чисел, десятичных дробей, методов решения систем линейных уравнений, алгебраических уравнений высших степеней и извлечения корней любой степени.

Задача о фазанах и кроликах.

В клетке находится известное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

Китайцы решали эту задачу при помощи такого рассуждения: «Если бы в клетке были только одни фазаны, то число их ног было бы 70,а не 94.Таким образом,24 ноги, которые оказались лишними, принадлежат кроликам по 2 ноги на каждого. Откуда заключаем, что кроликов было 12, а фазанов 23.»

Задача Сунь-цзы.

Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2, наконец, при делении на 7 – остаток 2.

Сам Сунь-цзы решает свою задачу по такому правилу: «При делении на 3 остаток есть 2, поэтому возьмите 140. При делении на 5 остаток есть 3, поэтому возьмите 63. При делении на 7 остаток есть 2, поэтому возьмите 30. Сложив их вместе,получим 233. Из этого легко вычтите 210, и мы получим ответ».

СУНЬ-ЦЗЫ

(6 — 5 вв. до н. э.), древнекитайский полководец, военный теоретик и мыслитель. Автор знаменитого трактата о военной стратегии «Искусство войны». Рассматривал войну как важнейшее событие, от которого зависит судьба государства, и указывал на большую роль политики в подготовке войны.

Задача из трактата Девять отделов искусства счета.

Пять волов и два барана стоят 11 таэлей, а два вола и восемь баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоит отдельно вол и баран?

Решение: 5в+2б=11т,
2в+8б=8т.

1) 11*4=44 (таэля) - стоят 20 волов + 8 баранов;
2) 44-8=36 (таэлей) - стоят 18 волов;
3) 36:18=2 (таэля) - стоит 1 вол;
4) 11-2*5=1 (таэль) - стоит 1 баран.

Ответ: 2 таэля стоит 1 вол и 1 таэль стоит 1 баран.

Задача о буйволах и баранах.

Пять буйволов и два барана стоят 10 ланов, два буйвола и пять баранов стоят 8ланов золота. Сколько стоят буйвол и баран?

Решение: 2б+5буй=10л,
2буй+5б=8л..

1) 10+8=18 (ланов) –
7 буйволов+7 баранов;
2) 18:7=18/7 (ланов) –
1 буйвол+1 баран;
3) 10-2*18/7=10-36/7=34/7(ланов) –
3 буйвола;

4) 34/7:3=34/21=1и13/21(ланов) –
1 буйвол;
5) 18/7-34/21=(54-34)/21=20/21(ланов)–
1 баран.

Ответ: 1и13/21ланов стоит 1буйвол
и 20/21ланов стоит 1баран.

3. Задачи Древней Греции

Математика в современном понимании этого слова родилась в Древней Греции. Математической теории в полном смысле этого слова не было, дело ограничивалось сводом эмпирических правил, часто неточных или даже ошибочных. Математику использовали либо для обыденных нужд (подсчеты, измерения), либо, наоборот, для магических ритуалов, имевших целью выяснить волю богов (астрология, нумерология).

Известная пифагорейская школа выдвинула тезис «Числа правят миром», или, как сформулировали эту же мысль два тысячелетия спустя, «Природа разговаривает с нами на языке математики» (Галилей). Это означало, что истины математики есть в известном смысле истины реального бытия.

Для открытия таких истин пифагорейцы разработали законченную методологию. Сначала они составили список первичных, интуитивно очевидных математических истин (аксиомы, постулаты). Затем с помощью логических рассуждений (правила которых также постепенно унифицировались) из этих истин выводились новые утверждения, которые также обязаны быть истинными. Так появилась дедуктивная математика.

Предлагаем Вам решить так называемую задачу Дидоны с красивым и в некотором роде «сказочным» сюжетом.

Задача Дидоны.

В древнем мифе рассказывается, что тирский царь Пигмалион убил Сихея, мужа своей сестры Дидоны, чтобы овладеть ее богатством. Дидона, покинув Финикию, после многих приключений оказалась в Северной Африке. Король нумидийцев Ярб обещал подарить Дидоне участок земли на берегу моря, «не больше, чем можно окружить воловьей шкурой». Хитрая Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие полоски, связала из них очень длинную веревку и отмерила большой участок земли, на котором основала город Карфаген.

Участок земли какой формы окружила Дидона веревкой данной длины, чтобы получить наибольшую площадь?

Решение этой задачи следует из изопериметрического свойства круга: среди всех плоских фигур данного периметра максимальную площадь имеет круг. Это замечательное свойство круга было известно в Древней Греции. Поэтому Дидона окружила имевшийся участок земли веревкой в форме полукруга с центром на берегу моря.

Задача Диофанта

В книге "Арифметика" Диофанта Александрийского впервые встречается уравнения, решения которых нужно найти на множестве целых чисел. Такие уравнения впоследствии получили название состояла из 13 книг, сохранились только 6 первых. Большая часть труда- это сборник задач с решениями (сохранились 189 задач). На примере решения задач автор демонстрирует общие методы . Диофант исследует системы уравнений 2-го порядка от 2 неизвестных и показывает различные варианты решений одного уравнения. Одна группа уравнений, так называемые неопределенные уравнения, до сих пор называются диафантовыми уравнениями.

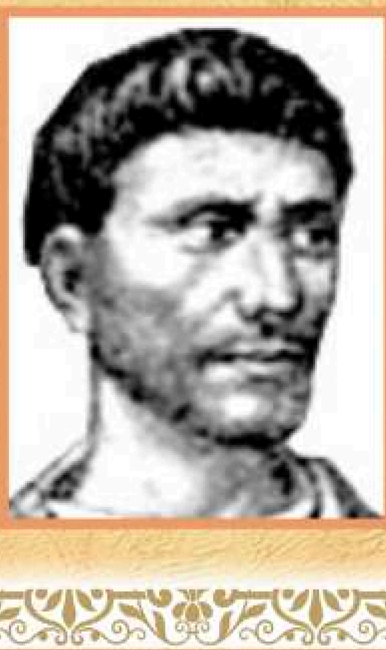
Именно для них он нашел способ решения. И данные методы используются и для решения уравнений высших степеней.

Диофант был столь известным математиком, что по преданию, даже эпитафия на его могильном камне и та была написана в виде задачи.

Здесь погребен Диофант, в камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением бога он мальчиком был шестую часть
своей жизни,
В двенадцатой части прошла его юность.
Седьмую часть жизни прибавим – пред нами очаг
Гименея,
Пять лет протекло и прислал Гименей ему сына
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты той тяжкой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть воспринял Диофант?

Решение:

1) 1/16+1/12+1/7=33/84(ч)-до рождения сына без 5лет;
2) 1-(33/84+1/2)=1-75/84=9/84(ч)-на 9лет;
3) 9:9/84=84(г)-возраст Диофанта.
Ответ: 84 года.



ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

(325 – 409 гг.), выдающийся древнегреческий математик. Составил арифметику целых и дробных чисел (изд. Tannery 1893 – 1895) и трактат о многоугольных числах. Им введен в математику неопределенный анализ.

Самый распространенный способ решения данной задачи - составление уравнения:

Примем за x - возраст Диофанта, тогда можем составить уравнение:

$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 + = x;$

$14x/84 + 7x/84 + 12x/84 + 42x/84 - 84x/84 = -9;$

$-9x/84 = -9;$

$x = 84.$

Есть еще способ решения задачи - составление уравнения:

Обратим внимание на то, что возраст Диофанта должен делиться на 6, 12, и 7. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 84. Это и есть возраст, в котором умер Диофант.

Как видим, все способы решения дают один о тот же возраст Диофанта 84 года. 14 лет Диофант был ребёнком, 7 лет с 14 до 21 года - юношей. Женился Диофант в 33 года, а в 38 лет у него родился сын. Сын Диофанта прожил 42 года и умер, когда отцу было 80 лет.

Школа Пифагора

Пифагор организовал школу, которую назвали пифагорейской. Первое построение геометрии, как дедуктивной науки, принадлежит Пифагору Самосскому. В молодости Пифагор путешествовал по Египту и Вавилону, изучая мудрость жрецов. Около 530г. до н.э. он переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз (школу). Деятельность союза была окружена тайной. В школе Пифагора процветала числовая мистика. Пифагор учил, что "число есть сущность всех вещей". Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли.

ПИФАГОР САМОССКИЙ

(570 – 490 гг. до н. э.), древнегреческий философ и математик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев. В современном мире Пифагор считается великим математиком и космологом древности. Самые ранние известные источники об учении Пифагора появились лишь 200 лет спустя после его смерти. Сам Пифагор не оставил сочинений, и все сведения о нём и его учении основываются на трудах его последователей, не всегда беспристрастных.

Задача о школе Пифагора

Тиран острова Самос Поликрат однажды спросил у Пифагора, сколько у того учеников. "Охотно скажу тебе, о Поликрат, - отвечал Пифагор. – половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины".

Сколько учеников было у Пифагора?

Решение:

НОК (2,4,7) = 4*7=28

Ответ: 28 учеников.

Задача "Суд Париса"

Один из древнейших мифов содержит сказание о суде троянского царевича Париса… Однажды на свадьбе богиня раздора Эрида подбросила собравшимся гостям яблоко с надписью "прекраснейшей". Из-за этого яблока возник спор между богиней мудрости и справедливой войны Афиной, богиней любви и красоты Афродитой и сестрой и супругой Зевса Герой. Они обратились к царю и отцу богов и людей Зевсу, чтобы он решил, кому должно достаться яблоко. Зевс оправил богинь на гору к Парису, который пас там свои стада. Парис должен был решить, какая из богинь самая прекрасная. Каждая из богинь пыталась склонить юношу на свою сторону: Афина предлагала мудрость и военную славу, Афродита – красивейшую женщину на земле в жены, Гера – власть и богатство. Как Парис определил прекраснейшую из богинь, можно узнать, решив старинную задачу.

Богини Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.
Афродита. Я самая прекрасная.
Афина. Афродита не самая прекрасная.
Гера. Я самая прекрасная.
Афродита. Гера не самая прекрасная.
Афина. Я самая прекрасная.

Парис, прилегший отдохнуть на обочине дороги, не счел нужным даже снять платок, которым прикрыл глаза от яркого солнца. Но богини были настойчивы, и ему нужно было решить, кто из них самая прекрасная. Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истины, а все утверждения двух остальных богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?

Ответ: Афродита – прекраснейшая из богинь.

Задача о музах:

По представлению древних греков науками и искусствами ведали мифические женские существа – музы:
Евтерна – богиня-покровительница музыки;
Клио – истории;
Талия – комедии;
Мельпомена – трагедии;
Терпсихора – танцев и хорового пения;
Эрато – поэзии;
Полимния – лирической поэзии;
Урания – астрономии;
Каллиопа – эпоса и красноречия.

Местопребыванием муз и Аполлона служила гора Геликон. Учреждения, где протекала деятельность ученых, назывались музеумами (музеями) – жилищами муз. В поэтической задаче о музах бог любви Эрот жалуется богине красоты и любви Киприде на муз.

Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает: "Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!" "Яблок я нес с Геликона немало" – Эрот отвечает – Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу. Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио Пятую долю взяла. Талия – долю восьмую. С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла Терпсихора. С частью седьмою Эрато от меня убежала. Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа. Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками. Только полсотни плодов оставили мне музы на долю.

Сколько яблок нес Эрот до встречи с музами?

Решение:

НОК (12,5,8,20,4,7) =
= 7*8*20*3 = 3360

Ответ: 3360 яблок.

Задача о статуе Минервы

Сохранилась “Греческая антология” в форме сборника задач, составленных в стихах, главным образом гекзаметром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера (IX-VIII вв. до н.э.) “Илиада” и “Одиссея”. “Греческая антология” была написана в VI в. н.э. грамматиком Метродором. В “Греческой антологии” содержится задача о статуе богини мудрости, покровительнице наук, искусств и ремёсел Минерве.

Я – изваянье из злата.
Поэты то злато
В дар принесли:Харизий принёс
половину всей жертвы,
Феспия часть восьмую дала;
десятую Солон.
Часть двадцатая – жертва
певца Фемисона, а девять
Всё завершивших талантов –
обет, Аристоником данный.

Сколько же злата поэты все вместе в дар принесли?

Решение: НОК (2,8,10,20) = НОК (8,20) = 40
Ответ: 40

Лабиринты.

Лабиринты – слово греческое, означает “ходы в подземельях”.Безвыходных лабиринтов нет.

Знаете ли вы один из самых прекрасных древнегреческих мифов о победе Тесея над Минотавром? Критский царь Минос приказал знаменитому художнику и архитектору Дедалу построить лабиринт. В этот лабиринт, с бесчисленными коридорами, тупиками и переходами, Минос поселил Минотавра (кровожадное существо с человеческим телом и головой быка) и потребовал у афинян, убивших его сына, раз в девять лет присылать на съедение чудовищу семерых сильнейших юношей и семерых красивейших девушек. Их отводили в лабиринт, и юные афиняне, блуждая там, становились жертвами Минотавра. Когда афиняне готовили кровавую дань в третий раз, сын афинского царь Эгея, Тесей, задумал освободить родной город от позорной обязанности. Вместе с очередной группой жертв Минотавра он отправился на Крит с целью убить чудовище. Дочь Миноса, Ариадна, полюбила мужественного Тесея и дала ему волшебный клубок, который помог ему найти выход из лабиринта. Привязав конец нити у входа, Тесей пошёл на поиски Минотавра. Поединок закончился победой юноши, который затем, идя обратно по нити Ариадны, вышел из лабиринта и вывел оттуда всех обречённых.

А сможете ли вы найти выход из лабиринта?

Как можно достать из муравейника зёрнышко?

4. Математическое творчество в Древней Индии.

В долине реки Инда еще в III тыс. до н. э. существовала развитая цивилизация, одним из центров, которой был Мохенджо-Даро. В I тыс. до н. э. возникли рабовладельческие государства. Борьба за власть в этих государствах велась между воинами-кшатриями и священниками-брахманами. В это же время появляются священные книги брахманов «Веды» (в переводе с санскритского языка «Знания»). Первые индийские письменные памятники относятся к VII–V вв. до н. э. В V в. до н. э. в Индии возникает новая религия – буддизм. В легенде о Будде рассказывается, что он мог пересчитать по названиям все десятичные разряды чисел от 1 до 10.

Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики (индийская десятичная позиционная нумерация), алгебры (метод рассеивания для решения неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными) и тригонометрии (бесконечные ряды для синуса, косинуса и арктангенса). Наиболее ранние сведения о математике в Древней Индии относятся к эпохе составления священных религиозно-философских книг «Веды». Вот одна из них.

священные «Веды»

Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны.

Какова ценность вещи?

Задача сводится к решению уравнения $ax + в = cx + d$, откуда $x = (d - в) : (a - c)$, где у первого лица будет a вещей и $в$ монет, а у второго лица – c вещей и d монет.

Геометрия вызывала у индийцев меньший интерес. Доказательства теорем состояли из чертежа и слова «смотри». Формулы для площадей и объемов, а также тригонометрию они, скорее всего, унаследовали от греков.

В Древней Индии математика распространялась, как своего рода, спорт. Для решения сложных задач устраивались соревнования в присутствии многочисленных зрителей. Некоторые индийские труды по математике были написаны как учебные пособия по проведению подобных соревнований - для повышения мастерства любителей умственного спорта. Автор одного из таких учебников писал: «Придерживаясь приведенных здесь правил, можно придумать тысячи других задач. Подобно тому, как солнце затмевает своим сиянием звезды, слава ученого человека, который сопоставил и решил задачу алгебраизма, затмевает славу других ученых в многолюдных собраниях». Весь учебник этого автора написан в стихотворениях.

Приведем одну из задач, не в стихотворном, а в прозаичном варианте.

«Пчелы числом, равным квадратному корню из полного числа их во всем рое, сели на куст жасмина, 8/9 пчел полетели обратно к рою. И только одна пчела из того же роя кружилась над цветком лотоса, притянутая жужжанием подруги, которая неосторожно попала в ловушку сладко благоухающего цветка».

Сколько всех пчел было в рое?

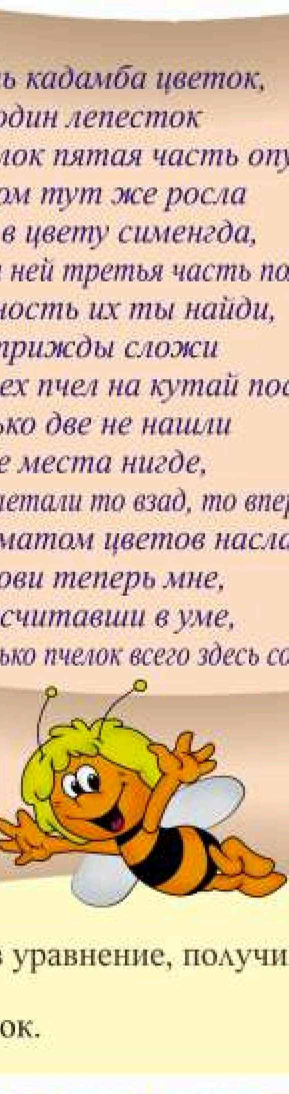
Решение:

Пусть x – число пчел в рое.
Тогда $x = \sqrt{(x/2)} + (8/9)x + 2$, (1)
Обозначив $\sqrt{(x/2)}$) через y, преобразуем уравнение (1) (так как $y^2 = x/2$, или $x=2y^2$) к виду $y + (16/9)y^2 + 2 = 2y^2$, (2)
$2y^2 - 9y - 18 = 0$, откуда $y1 = 6$, $y2 = -3/2$. Этим значениям y соответствуют следующие значения x: $x1 = 72$, $x2 = 4,5$. Так как число пчел в рое может быть только натуральным числом, тогда:
$\sqrt{(72/2)} + (8/9)\times 72 + 2 = 72$.
Значит, в рое было 72 пчелы.

Ответ: 72 пчелы.

А вот задача в стихах.

Есть кадамба цветок,
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда,
И на ней третья часть поместилась.
Разность их ты найди,
Ее трижды сложи
И тех пчел на кутай посади.
Только две не нашли
Себе места нигде,
Все летали то взад, то вперед и везде
Ароматом цветов наслаждались.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось?



Решение: x/5+x/3+(x/3-x/5)*3+1=x. Решив уравнение, получим, что x = 15.

Ответ: 15 пчелок.

5. Математические загадки из арабских сказок.

Замечательную задачку мы можем найти в собранных много веков назад арабских сказках «1001 ночь» (ночь 458-я):

«Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Голуби, которые сидели на ветвях, говорят к тем, что внизу: «Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас взлетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?

Решение:

Пусть x – число голубей, что сели на дерево, а y – число голубей, что разместились под деревом. Тогда

$y - 1 = (x + y) / 3$

и, кроме того, $x - 1 = y + 1$, тогда $x = y + 2$.

Подставляя $x = y + 2$ в первое уравнение, получаем

$(y - 1) \times 3 = y + 2 + y$,

$3y - 3 = 2y + 2$,

$y = 5$.

Значит, $x = y + 2 = 7$.

Отсюда, 7 голубей сели на дерево, а 5 голубей разместились под деревом.

Ответ: 7 голубей - на ветвях и 5 голубей – под деревом.

6. Нестандартные задачи и их решения.

а) Задача Бхаскары

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько ты скажешь
Обезьян там было в роще?

Эту задачу сам Бхаскара решал примерно так:
если обозначим число всех обезьян **x**, то задача сведется к решению уравнения: X^2/64+0*X+12=0*X^2+X+0.
После приведения к одному знаменателю и упрощения получим: X^2-64X=-768.
Прибавляя к обеим частям квадрат 32, будем иметь: X^2-64X+32^2=-768+1024.
После извлечения квадратного корня получаем: X-32=16.
"В данном случае, - говорит Бхаскара, - отрицательные единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше их, а потому последние можно считать и положительными и отрицательными, и получаем двойное значение неизвестного: 48 и 16".

Найти число, которое, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу, равняется ушестеренному квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью.

Решение Бхаскары

Решение задачи приводит к уравнению: X^2+12X=6X^2+35, или X^3+12X-6X^2=35.
Вычитая из обеих частей равенства 8, будем иметь:

X^3-6X^2+12X-8=27,
(X-2)^3=27,
X-2=3,
X=5.

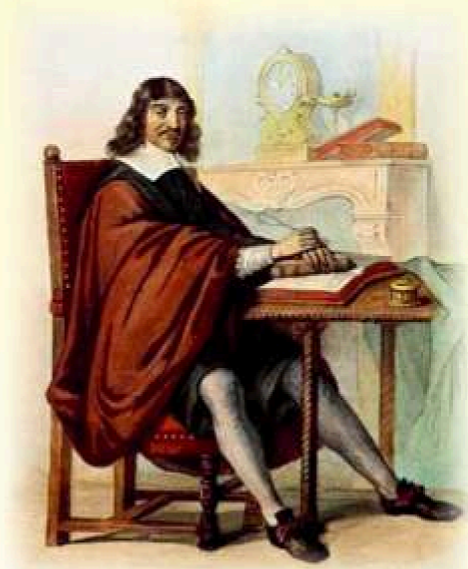
БХАСКАР АЧАРЬЯ

(1114 — умер позднее 1178), индийский математик и астроном. Автор труда "Венец систем" (около 1150), содержащего методы решения ряда алгебраических и теоретико-числовых задач. Бхаскар написал трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»), состоящий из четырёх частей: «Лилавати» посвящена арифметике, «Бижда ганита» – алгебре, «Голадхайя» – сферике, «Гранхаганита» – теории планетных движений.

Значения других двух корней Бхаскара не дает (комплексные корни он не рассматривает). Исходное кубическое уравнение можно было бы решить несколько иначе и так же элементарно.

Ниже дается это решение:
X^3-6X^2+12X-35=0,
X^3-5X^2-X^2+5X+7X-35+0,
X^2(X-5)-X(X-5)+7(X-5)=0,
(X-5)(X^2-X+7)=0.
Это уравнение распадается на два:
X-5=0 и X^2-X+7=0.
Решив эти два уравнения, найдем X, который равен 5.
Ответ: 5.

б) Задача Декарта



Решить уравнение:
$\tilde{o}^4 - 4\tilde{o}^3 - 19\tilde{o}^2 + 106\tilde{o} + 120 = 0.$
Данное уравнение можно представить так:
$\tilde{o}^4 - 4\tilde{o}^3 - 19\tilde{o}^2 + 76\tilde{o} + 30\tilde{o} - 120 = 0,$
или
$\tilde{o}^3(\tilde{o} - 4) - 19\tilde{o}(\tilde{o} - 4) + 30(\tilde{o} - 4) = 0.$
откуда
$\tilde{o}_1 = 4.$
Остальные корни находятся из уравнения
$\tilde{o}^3 - 19\tilde{o} + 30 = 0.$
Чтобы найти эти корни, представим последнее уравнение в виде
$\tilde{o}^3 - 3\tilde{o}^2 + 3\tilde{o}^2 - 9\tilde{o} - 10\tilde{o} + 30 = 0,$
Или
$\tilde{o}^2(\tilde{o} - 3) + 3\tilde{o}(\tilde{o} - 3) - 10(\tilde{o} - 3) = 0.$
Откуда $\tilde{o}_2 = 3$, а остальные два корня находятся из уравнения
$3\tilde{o} - 10 = 0.$
Ответ: -5; 2; 3; 4.

РЕНЕ ДЕКАРТ

(1596 – 1650 гг.), французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии. Декарт заложил основы аналитической геометрии, дал понятия переменной величины и функции, ввел многие алгебраические обозначения. Высказал закон сохранения количества движения, дал понятие импульса силы.

в) Задача Безу

Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается, за какую сумму он ее купил?

Решение:

Предположим, что лошадь куплена за **x** пистолей, тогда при продаже некто потерял $x^2/100$ пистолей.

Следовательно, согласно условию задачи
$x - x^2/100 = 24$

Решая полученное квадратное уравнение, получим два результата:
$x=40$ и $x=60$.
Таким образом, некто купил лошадь за 40 или 60 пистолей.

Решенная задача составлена французским математиком Этьеном Безу (1730 – 1783). Его перу принадлежат исследования по общей теории алгебраических уравнений (1779), а также известная теорема Безу о делимости алгебраического многочлена на разность **(x – a)**, где **a**– корень многочлена. Безу является также автором многих учебников, написанных для средней школы.

БЕЗУ ЭТЬЕНН

(1730 – 1783 гг.), французский математик, член Парижской АН (1758). Основные работы относятся к высшей алгебре (исследование свойств систем алгебр, уравнений высших степеней и исключение неизвестных в таких системах). Преподавал математику в Училище гардемаринов и Королевском артиллерийском корпусе. Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.).

г) Задача Эйлера

Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала второй: “Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров”. Вторая ответила: “А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них 6 2/3 крейцера”. Сколько яиц было у каждой?

Наиболее остроумный способ решения этой задачи таков. Предположим, что вторая крестьянка имела в **т** раз больше яиц, чем первая. Поскольку обе крестьянки выручили одинаковые суммы, то первая должна продавать свои яйца дороже, чем вторая, **т** раз. Если бы перед началом торговли они поменялись новым ко-личеством яиц, то первая крестьянка, имея яиц в **т** раз больше и продавая их в **т** раз дороже, выручила бы в **т** раз больше, чем вторая.

Откуда $m^2 = \frac{15}{\frac{20}{3}} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

Следовательно, m=3/2.

Разбив 100 яиц в отношении 3:2, находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая – 60 яиц.

Эту задачу можно решить и алгебраическим путем, для чего стоит только обозначить через**х**число яиц у первой крестьянки. Тогда у второй крестьянки число яиц будет 100 –**х**.

Откуда первая крестьянка продала свои яйца по цене $\frac{15}{100-x}$ (крейцеров),

вторая по $\frac{\frac{20}{3}}{x} = \frac{20}{3 \cdot x}$ крейцеров.

Так как выручка одинаковая, то 15/(100-х)=20*(100-х)/3*х

или х^2+160*х–8000=0

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

(1707 – 1783 гг.), немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

$X^2+200X-40X-8000=0$,
$X(X-40)+200(X-40)=0$,
$(X+200)(X-40)=0$,

$X+200=0$ $X=-200$ (Не удовл. условию задачи)	$X-40=0$ $X=40$

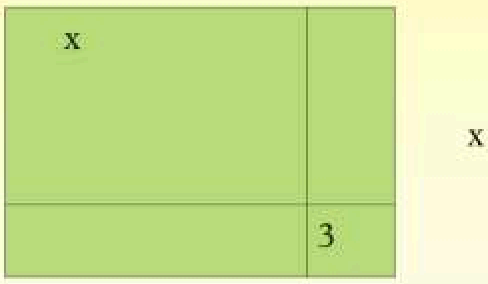
Следовательно, у первой крестьянки было 40 яиц, у второй – 60.

Ответ: 40 яиц-у 1-ой крестьянки и 60 яиц-у 2-ой.

д) Задача Кардана

Найти построением положительный корень уравнения $x^2+6*x=91$
Сам Кардан решал эту задачу таким образом. Пользуясь чертежом, имеем

$$x^2+2*3*x+9=x^2+6*x+9–(x+3)^2$$



Согласно условию $x^2+6*x=91$
Из этих двух уравнений вытекает $(x+3)^2=91=100$
Откуда $x+3=10$.
Следовательно, $\mathbf{x} = 7$.
(Рекомендуется эту задачу решить обычным приемом по формуле квадратного уравнения.)

КАРДАН ДЖЕРОНИМО

(1501 – 1576 гг.), математик, медик и философ, с 1534 профессор мат. в Милане и Болонье. Его именем назыв. формулы для решения уравнения третьей степени, нахождение которых, однако, приписывается Тарталье. Кардану принадлеж. изобретение особого способа подвешивания кольца, при котором оно остается в равновесии при всяких колебаниях и перемещениях станка. Применяется для прикрепления корабельных компасов и ламп.

7. Старинные задачи.

Задача 1.

Три брата получили 24 яблока, причем младшему досталось меньше всех. Видя это, младший брат предложил такой обмен яблоками:

«Я оставлю себе половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну. После этого пусть средний брат, а за ним старший поступят также. Братья согласились. В результате яблок у всех стало поровну».

Сколько яблок было у каждого брата первоначально?

Решение:

	Стало	Шаг назад	Шаг назад	Было
Старший	24:3=8(ябл.)	8*2=16(ябл.)	16-2=14(ябл.)	14-1=13(ябл.)
Средний	24:3=8(ябл.)	8-4=4(ябл.)	4*2=8(ябл.)	8-1=7(ябл.)
Младший	24:3=8(ябл.)	8-4=4(ябл.)	4-2=2(ябл.)	2*2=4(ябл.)

Ответ: 13 яблок - у старшего, 7 яблок - у среднего и 4 яблока - у младшего.

Задача 2.

Крестьянин попросил взять у царя яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, причем каждый забор имеет одни ворота, вход в которые охраняют сторожа. Подошел крестьянин к первому сторожу и говорит: «Царь разрешил взять мне одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что возьмешь, и еще одно». Эти же слова повторили крестьянину второй и третий сторожа, охранявшие другие ворота.

Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть трем сторожам, у него осталось одно яблоко?

Решение:

	У 1-го сторожа	У 2-го сторожа	У 3-го сторожа
Крестьянин	1 яблоко (1+1)*2=4(ябл.)	4 яблока (4+1)*2=10(ябл.)	10 яблок (10+1)*2=22(ябл.)

Ответ: 4,10 и 22 яблока.

Задача 3.

Один купец прошел через 3 города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть. И когда он прибыл домой, у него осталось имущества на 1000 денежных единиц.

Узнайте, какова была стоимость имущества у купца?

Решение:

1) первый город
1/2 + 1/3=5/6,
36000*6=216 000(ден.ед.);

2) второй город
6000*6=36 000(ден.ед.);

3) третий город
6*1000=6 000(ден.ед.).

Ответ: 216 000 денежных единиц.

Задача 4.

В три сосуда налита вода. Если половину из первого перелить во второй, а затем 1/3 того, что стало во втором, перелить в третий, а 1/4 того, что стало в третьем, перелить в первый, то во всех сосудах окажется по 6 литров.

Сколько литров воды было в каждом сосуде?

Решение:

	I сосуд	II сосуд	III сосуд
Стало	6 л.	6 л.	6 л.
Шаг назад	6-2=4 л.	6 л.	6:(1-1/4)=8 л.
Шаг назад	4 л.	6:(1-1/3)=9 л.	8-3=5 л.
Шаг назад	4:(1-1/2)=8 л.	9-4=5 л.	5 л.

Ответ: 8, 5 и 5 литров.

Задача 5.

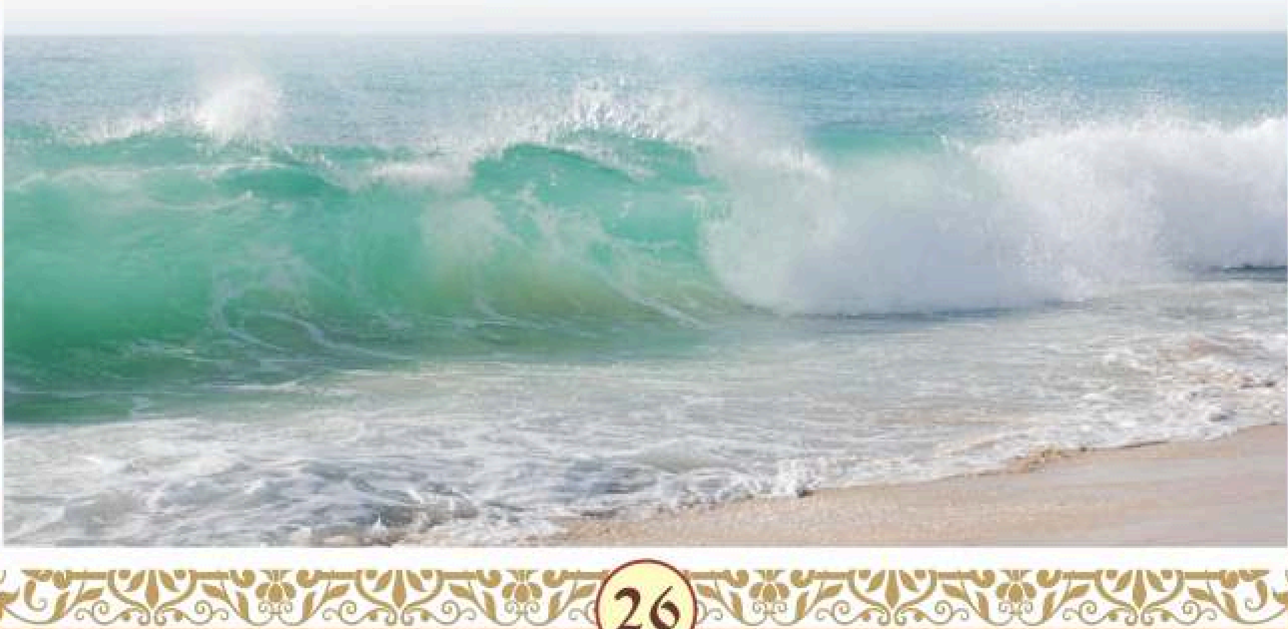
В 4 сосуда налита вода. Если пятая часть из первого перелить во второй, а затем 1/3 того, что стало во втором, перелить в третий, а 3/7 того, что стало в третьем, перелить в четвертый, а 1/4 того, что стало в четвертом перелить в первый, то во всех сосудах станет по 12 литров.

Сколько литров воды было в каждом сосуде?

Решение:

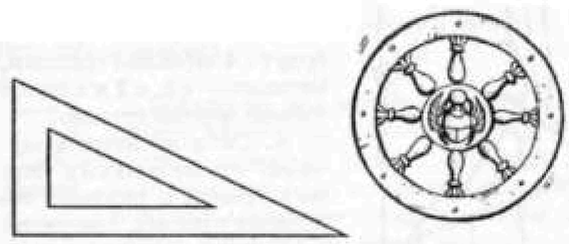
	Стало	Шаг назад	Шаг назад	Шаг назад
I с. 12л.	12-(16-12)=8 л.	8 л.	8 л.	8:4/5=10 л.
II с. 12л.	12 л.	12 л.	12:2/3=18 л.	18-(10-8)=16 л.
III с. 12л.	12 л.	12:(1-3/7)=21 л.	21-(18-12)=15 л.	15 л.
IV с. 12л.	12:(1-1/4)=16 л.	16-(21-12)=7 л.	7 л.	7 л.

Ответ: 10, 16, 15 и 7 литров.

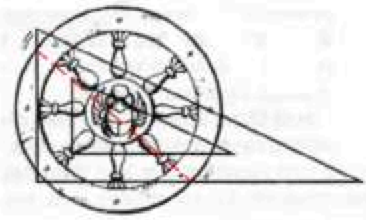


8. Математические загадки.

Центр колеса.



Как, имея в наличии только чертежный угольник и карандаш, точно определить центр круга (в данном случае колеса)?



Вписанный угол — это такой, вершина которого лежит на окружности. А по величине он равен половине той дуги, на которую опираются его концы. И если вписанный угол опирается на диаметр, то дуга между его концами — ровно половина окружности, или 180 градусов, а сам угол — половина этой дуги, то есть 90 градусов, или прямой.

Нужно положить чертежный угольник на колесо — так, чтобы вершина его прямого угла оказалась на ободе. Теперь нужно заметить, где пересекают обод оба катета угольника.

Через эти две точки провести прямую и получить первый диаметр (он прочерчен пунктиром?).

Потом точно так же проведи и другой диаметр. А где пересекаются все диаметры?

Черно-белый куб.

Есть куб — черный снаружи, но белый внутри. Высота его равна его ширине и толщине и составляет три локтя.

1. Сколько разрезов понадобится, чтобы разделить большой куб на маленькие кубики размером всего в один локоть?
2. Сколько получится кубиков после такого разрезания?
3. Сколько из кубиков будут с 4 черными гранями, сколько — с 3, с 2 и с одной только черной гранью?
4. Сколько всего получится маленьких черных граней и сколько получится кубиков, совершенно белых со всех сторон?

Решение:

Разрезов понадобится всего шесть. Каждую из граней куба надо рассечь дважды. Маленьких кубиков получится 27 штук: три слоя и в каждом — по девять кубиков, выложенных квадратом 3 х 3.

Кубиков с четырьмя черными гранями ни одного. С тремя черными гранями окажутся те кубики, которые вырезаны из вершин большого куба. А вершин у куба всего восемь. Чтобы у маленького кубика оказалось только две черные грани, его надо вырезать из середины ребра большого куба. Значит маленьких кубиков с двумя черными гранями получится двенадцать. Ну, и с одной черной гранью получится 6 кубиков.

Из каждой большой грани получается 3 х 3 = 9 маленьких. А раз больших граней было шесть, то маленьких выйдет 3 х 3 х 6 = 54. Кубик, у которого все стороны белые, получится только один — из самой середины большого куба.

Древняя задача.

Древняя задача на бытовую тему. Ее задавал своим ученикам учитель арифметики Якоб из Кобурга, чей учебник был напечатан в 1599 г. во Франкфурте.

Расстояние между 2 городами составляет 260 миль. Из обоих городов навстречу друг другу выходят 2 гонца. Один из них ежедневно проходить на 2 мили больше, чем другой. Через 12 дней гонцы встречаются.

Сколько миль проходить ежедневно каждый гонец?

Решение:

Пусть y − число миль, которое проходит за день один, а x − другой гонец. Тогда

$y = x + 2$, (1)

$12x + 12y = 260$. (2)

Подставляя (1) в (2), получаем

$12x + 12(x+2) = 260$,

откуда

$x = 9$ та $5/6$.

Таким образом, один гонец проходил за день 9 и 5/6 миль, а другой − 11 и 5/6 миль.

Ответ: 9 и 5/6 миль – один гонец, 11 и 5/6 миль – другой гонец.

III. Заключение.

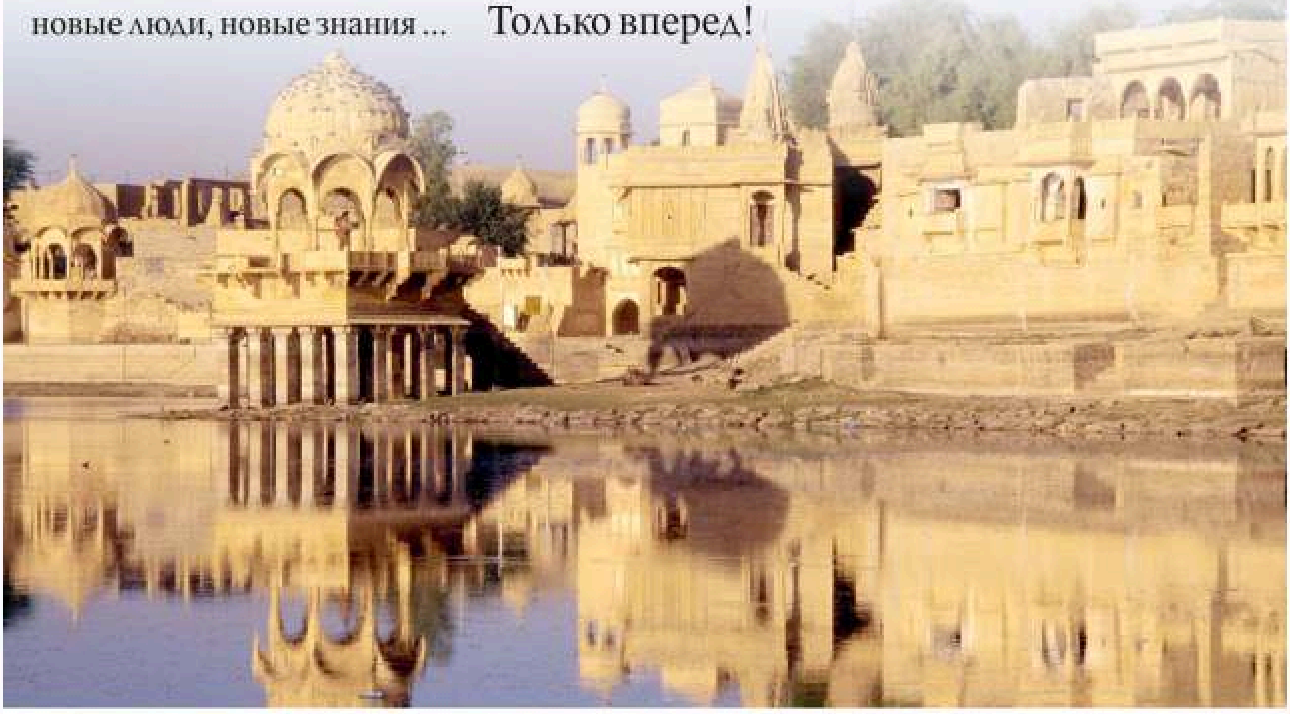
Современные исследователи отмечают, что животные разных видов, начиная с рептилий, обладают способностями обобщения, ряд позвоночных способны к зачаткам "символического мышления человека". А вороны, например, "способны не только к анализу ситуации, но и к обобщению, а также к формированию довербального понятия "число". Человек научился сознавать и оперировать различными понятиями, мыслить и у него возникла необходимость в создании системы счета.

Первыми понятиями математики, с которыми столкнулись люди, были понятия «больше», «меньше», «столько же». Прошло очень много времени, прежде чем появились названия чисел и различные системы счисления.

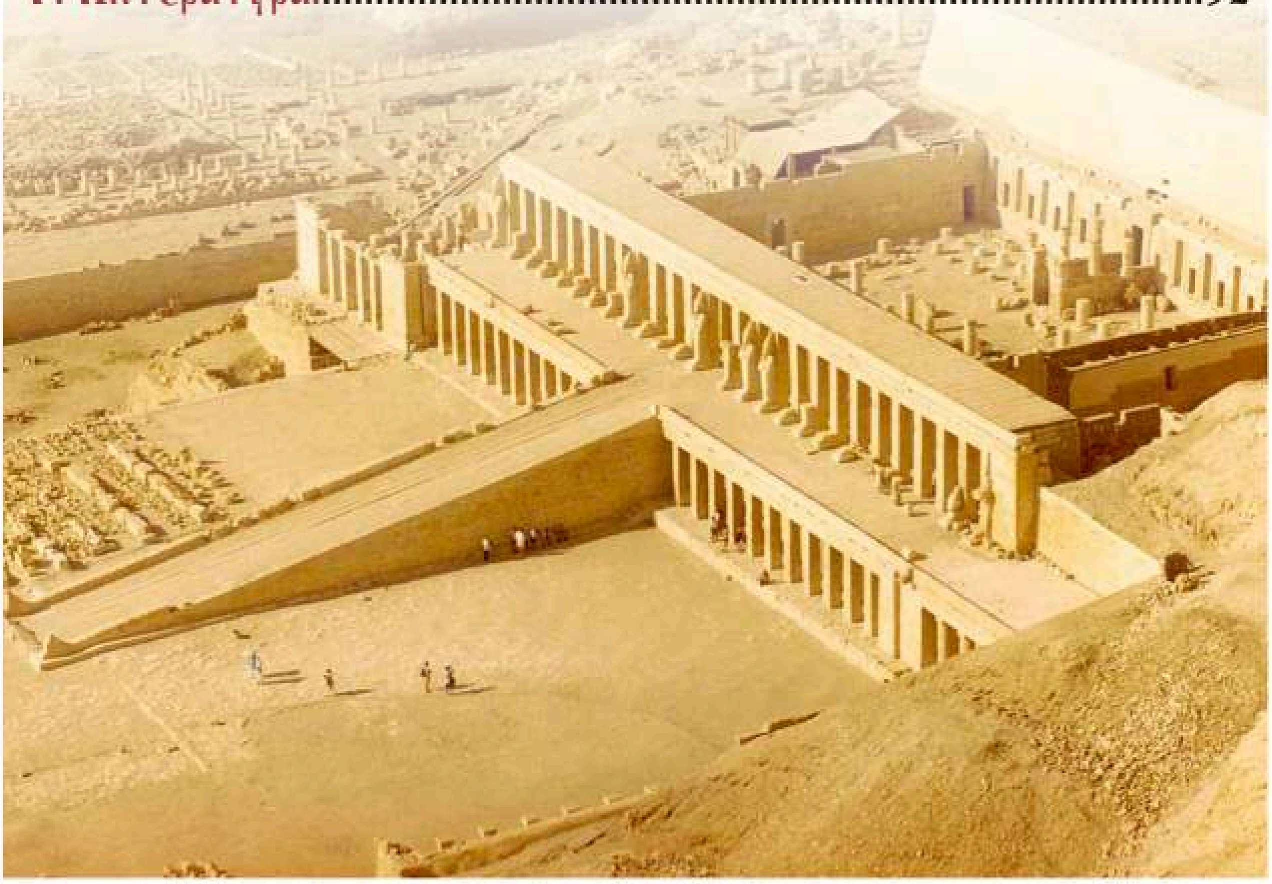
Познакомившись с различной литературой по интересующей меня теме «Занимательные задачи далекого прошлого» я понял, что решали их во все века развития математики. Ведь без измерений нельзя ни сшить платье, ни выточить на токарном станке деталь, ни узнать, который час. Так что измерения это одно из важнейших дел и в современной жизни.

В работе отражено много всевозможных вариантов древних математических задач, с различными способами их решений. Собраны задачи разных стран и народов с многогранным содержанием и глубоким смыслом.

А также собрана и отдельно выделена краткая справочная информация о людях, которые имели непосредственное отношение к задачам далекого прошлого. Тема настолько интересна и занимательна, что хотелось представить намного больше информации, но все имеет свои пределы. Этот процесс затягивает настолько, что дает возможность задуматься над следующим проектом, а это новые цели, новые люди, новые знания ... Только вперед!



IV. Содержание:



V. Литература:

1. Акимова С. Занимательная математика. СПб.,1997.
2. Асташкина И.С., Бубдиченко О.А. Дидактические материалы к урокам алгебры в 8-9 классах. Школа радости.2003.
3. Чистяков В.Д.. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами с подробными решениями. Изд. Минестерства высшего, среднего специального и профессионального образования БССР. Минск 1962.
4. Глейзер М. История математики в средней школе.-М.:Просвешение, 1970.-461с.
5. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. М., 1974.
6. Раик А.Е. Очерки по истории математики в древности. С., 1977.
7. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. — М.: Наука, 1990.
8. Баврин И.И., Фрибус Е.А.. Старинные задачи. М.: Просвещение, 1994.-128с.
9. Сунь-Цзы, У-Цзы. Трактаты о военном искусстве. — М.: «АСТ», 2002.
10. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977.
11. Асмус В.Ф. Декарт — М.: Высшая школа, 2006. — 335 с.
12. Свечников А.А. Путешествие в историю математики // М.: Педагогика-Пресс, 1995.
13. Депман И.Я. Виленкин Н. Я. За страницами учебника математики // М.: Просвещение, 1989.
14. Кордемский Б.А. Математическая смекалка // М.: Наука, 1984.