Составила

Соловьёва Людмила Петровна,

учитель ГБОУ СОШ №1358 г. Москвы.

*Вступление.*

*Книга создавалась для подготовки учащихся к успешной сдаче экзаменов. Использовалась учителями-предметниками нашей школы в текущей работе. Может быть полезной учащимся старших классов.*

# Тригонометрия

## Глава 1

### § 1 Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения.

**А**

I. Найдите:

1. $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -4/5$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$
2. $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$, $\pi/2 < \alpha < \pi$
3. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$, $0 < \alpha < \pi/2$
4. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -5/12$, $\pi/2 < \alpha < \pi$
5. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -8/17$, $\pi/2 < \alpha < \pi$
6. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 8/15$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$
7. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -7/24$, $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

II. Упростить выражения:

1. $\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$
2. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$
3. $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$

4. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
5. $\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$
6. $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}$
7. $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$
8. $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$
9. $\sin\alpha\cos\alpha\,(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)$
10. $\sin(\pi-2)\cos({}^{\pi}/_{2}-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)\sin({}^{3\pi}/_{2}+\alpha)$
11. $\cos^2(4\pi-\alpha)\times(\mathrm{tg}^2(9\pi+\alpha)+1)$
12. $\frac{\cos({}^{\pi}/_{2}-\alpha)\sin({}^{\pi}/_{2}+\alpha)\,\mathrm{tg}\,(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}\,({}^{\pi}/_{2}+\alpha)\sin(\pi-\alpha)}$
13. $\frac{\cos^2({}^{\pi}/_{2}+\alpha)}{\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi)}+\frac{\sin^2({}^{3\pi}/_{2}-\alpha)}{\mathrm{ctg}^2(\pi+\alpha)}$
14. $1-\frac{\mathrm{tg}\,({}^{\pi}/_{2}+\alpha)}{\mathrm{ctg}\,(\pi-\alpha)}+\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin({}^{3\pi}/_{2}+\alpha)}$

## III. Докажите тождество:

1. $\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{1-\mathrm{tg}^2x}=\sin x+\cos x$
2. $\mathrm{tg}^2x-\sin^2x=\sin^2x\,\mathrm{tg}^2x$
3. $\cos^2x\,(1-\mathrm{tg}x)\times(1+\mathrm{tg}x)=\cos^4x-\sin^4x$
4. $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2x}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2a}$

## IV. Упростить выражения:

1. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$
2. $\sin^2a+\cos^2\alpha-\sin^4a$
3. $\sin^4a+\sin^2a\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$
4. $\mathrm{ctg}^2a-\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2a-\cos^2\alpha$
5. $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\,\alpha)^2$

**В**

I. Найти:

1. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, если tgx = 2
2. $\frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + 2}{3 \sin x \cos x + \cos^2 x - 4}$, если tgx = 3
3. $2 \sin^2 x + \cos^2 x$, если tgx = 3
4. $\frac{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2}$, если tgx = 1
5. $\sin^4 x + \cos^4 x$, если tgx = 2
6. $\sin^6 x + \cos^6 x$, если tgx = 2
7. $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^6 x - \cos^6 x}$, если tgx = 2
8. $\frac{\sin^3 x - 2 \cos^3 x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x}$, если tgx = 2
9. а) tgα – ctgα, если tgα + ctgα = 3

   б) $tg^2\alpha$ - $ctg^2\alpha$,

   в) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$,
   г) $tg^3 \alpha + ctg^3\alpha$

II. Упростить выражения:

1. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \frac{2}{tg\alpha + ctg\alpha}$ - 1

2. $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$ $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
3. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
4. $(1+\sin\alpha)\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$
5. $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)$
6. $\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$

III. Доказать тождество:

1. $(\operatorname{ctg}\alpha+1)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha-1)^2 = \frac{2}{\sin^2\alpha}$
2. $\cos\alpha + \sin\alpha\ \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} = 0$
3. $\operatorname{tg}^2\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) - (1-\operatorname{tg}^2)^2 = 4\operatorname{tg}^2\alpha$
4. $\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$
5. $\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$
6. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha\ \cos\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$

IV. Упростить выражение:

1. $\operatorname{ctg}(3\pi/2 - \alpha)\sin(3\pi/2 + \alpha)\sin(\alpha - \pi/2) + \operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)$
2. $\sin(\alpha - 3\pi/2)\cos(\alpha + \pi/2)\operatorname{tg}(\alpha - \pi) - \cos(\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha)$

V. Доказать тождества:

1. $\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x} - \frac{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}{4\operatorname{tg}^2 x} = 1$
2. $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\times\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$
3. $\frac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}$
4. $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$
5. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$
6. $2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + (\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha - 1$
7. $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

§ 2 Преобразование тригонометрических выражений

П.1 <u>Формулы сложения.</u>

**А**

I. Вычислите:

1. $\sin\left(\pi/4+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = 3/5$, $0<\alpha<\pi/2$
2. $\cos\alpha\left(\pi/4-\alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\pi<\alpha<3\pi/2$
3. $\mathrm{tg}\left(\pi/3+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 4/5$, $0<\alpha<\pi/2$
4. $\mathrm{ctg}\left(\pi/3-\alpha\right)$ если $\cos\alpha = 0{,}6$ , $0<\alpha<\pi/2$
5. $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ , $\cos\beta = 2/5$, $\pi<\alpha<3\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$
6. $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = 2/5$ , $\cos\beta = -1/4$, $\pi/2<\alpha<\pi$, $\pi/2<\beta<\pi$

II. Упростить выражения:

1. $\sin\alpha\,\cos2\alpha - \sin2\alpha\,\cos\alpha$
2. $\cos5\alpha\,\sin3\alpha + \sin5\alpha\,\cos3\alpha$

3. $\sin\left(x+\pi/4\right)\sin\left(x-\pi/4\right)+\cos\left(x-\pi/4\right)\cos\left(x+\pi/4\right)$

4. $\cos(2x-3y)\cos 2x-3y-\sin(2x-3y)\sin(2x+3y)$

5. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$

6. $\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$

7. $\frac{\operatorname{tg}\pi/4-\operatorname{tg}\pi/12}{1+\operatorname{tg}\pi/4\operatorname{tg}\pi/12}$

8. $\frac{\operatorname{tg}\pi/18+\operatorname{tg}5\pi/18}{1-\operatorname{tg}\pi/18\operatorname{tg}5\pi/18}$

**B**

I. Доказать тождества:

1. $\frac{\sin(\beta-y)}{\cos\beta\cos y}+\frac{\sin(y-\alpha)}{\cos y\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=0$
2. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\pi/4+\alpha\right)$
3. $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\pi/4\right)$
4. $\operatorname{tg}\left(\pi/4-\alpha\right)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}$
5. $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\pi/4\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$
6. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$
7. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$
8. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$

II. Упростить выражения:

1. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$
2. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$

   1) Найти β, если $\pi/2<\beta<\pi$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=9/19$, $\operatorname{tg}\alpha=-4$

2) Найти $\alpha+\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha = {}^{3}/_{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = {}^{1}/_{7}$, $0<\alpha<{}^{\pi}/_{2}$, $0<\beta<{}^{\pi}/_{2}$

3) Найти $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = {}^{1}/_{4}$, $\operatorname{tg}\beta = {}^{5}/_{3}$, $0<\alpha<{}^{\pi}/_{2}$, $0<\beta<{}^{\pi}/_{2}$

4) Доказать, что если $\alpha+\beta = {}^{\pi}/_{2}$, то $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ вдвое меньше $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$

III. Проверить равенства:

1. $\dfrac{\sin 24\ \cos 6 - \sin 6\ \sin 66}{\sin 21\ \cos 39 - \sin 39\ \cos 21} = -1$

2. $\dfrac{\sin 20\ \cos 10 + \cos 160\ \cos 100}{\sin 21\ \cos 9 + \cos 159\ \cos 99} = 1$

3. $\dfrac{\cos 63\ \cos 3 - \cos 87\ \cos 27}{\cos 132\ \cos 72 - \cos 42\ \cos 18} = -\operatorname{tg}24$

4. $\dfrac{\cos 64\ \cos 4 - \cos 86\ \cos 26}{\cos 71\ \cos 41 - \cos 49\ \cos 19} = -1$

5. $\dfrac{\cos 66\ \cos 6 - \cos 84\ \cos 24}{\cos 65\ \cos 5 - \cos 85\ \cos 25} = 1$

## П.2 Формулы двойного и половинного угла.

**А**

I. Найдите:

1. $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg} 2x$, если $\cos x = {}^{5}/_{13}$, $0< x < {}^{\pi}/_{2}$
2. $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg} 2x$, если $\sin x = {}^{4}/_{5}$, ${}^{\pi}/_{2} < x < \pi$
3. $\cos {}^{x}/_{2}$, $\sin {}^{x}/_{2}$, $\operatorname{tg} {}^{x}/_{2}$, $\operatorname{ctg} {}^{x}/_{2}$, если $\sin x = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$, $0< x < {}^{\pi}/_{2}$
4. $\cos {}^{x}/_{2}$, $\sin {}^{x}/_{2}$, $\operatorname{tg} {}^{x}/_{2}$, $\operatorname{ctg} {}^{x}/_{2}$, если $\cos x = {}^{1}/_{2}$, ${}^{\pi}/_{2} < x < \pi$

II. Вычислить:

1. $2\sin {}^{\pi}/_{8}\ \cos {}^{\pi}/_{8}$
2. $\cos {}^{\pi}/_{12}\ \sin {}^{\pi}/_{12}$
3. $\cos^2 {}^{\pi}/_{6} - \sin^2 {}^{\pi}/_{6}$
4. $\left(\cos {}^{\pi}/_{8} + \sin {}^{\pi}/_{8}\right)^2$
5. $\dfrac{\operatorname{tg} {}^{\pi}/_{12}}{1-\operatorname{tg}^2 {}^{\pi}/_{12}}$
6. $2\cos^2 {}^{5\pi}/_{12} - 1$

7. $1 - 2\sin^2 {}^{7\pi}/_{8}$

## III. Упростить:

1. $1 - 2\cos^2 \left({}^{\pi}/_{4} - {}^{4x}/_{3}\right)$
2. $2\cos^2 \left({}^{\pi}/_{4} + {}^{3x}/_{2}\right) - 1$
3. $1 - 2\sin^2 \left({}^{\pi}/_{4} - {}^{5x}/_{2}\right)$
4. $2\sin^2 \left({}^{\pi}/_{4} - {}^{x}/_{2}\right) - 1$

## IV. Доказать тождества:

1. $2\sin^2 + \cos 2\alpha = 1$
2. $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2$
3. $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\, \alpha$
4. $\frac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\, \alpha$

**В**

## I. Выразить:

1. $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$
2. $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$

## II. Вычислить:

1. $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \mathrm{tg} 2\alpha, \mathrm{ctg} 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = -{}^{3}/_{4}$, ${}^{\pi}/_{2} < \alpha < \pi$
2. $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\mathrm{tg}\, {}^{\alpha}/_{2} = {}^{5}/_{3}$
3. $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha, \mathrm{tg} 3\alpha, \mathrm{ctg} 3\alpha$, если $\sin {}^{3\alpha}/_{2} = -{}^{5}/_{13}$, $\pi < \alpha < {}^{3\pi}/_{2}$
4. $\cos 4\alpha, \mathrm{tg} 4x$, если $\mathrm{tg}x = {}^{1}/_{5}$ и $\pi < x < {}^{3\pi}/_{2}$
5. $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$, если $\cos\alpha = -{}^{4}/_{5}$ и $\pi < \alpha < {}^{3\pi}/_{2}$
6. $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha = -{}^{3}/_{5}$ и ${}^{3\pi}/_{2} < \alpha < 2\pi$

## III. Упростить:

1. $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$ 2. $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

IV. Доказать тождества:

1. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2 {}^{\alpha}/_{2}$
2. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 {}^{\alpha}/_{2}$
3. $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0{,}5 \sin^2 2\alpha$
4. $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - 0{,}75 \sin^2 2\alpha$
5. $\frac{1+ \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$
6. $\cos^3\alpha - \cos 3\alpha = \mathrm{ctg}\alpha$
7. $\frac{1- \cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+ \cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$
8. $\frac{2- \sin 4\alpha\ \mathrm{ctg} 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \mathrm{tg} 2\alpha$

## П.3 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

**А**

I. Преобразовать в произведение:

1. $40 + \sin 20$
2. $\cos 40 + \cos 20$
3. $\cos {}^{\pi}/_{5} - \cos {}^{7\pi}/_{10}$
4. $\mathrm{ctg}( {}^{2\pi}/_{7}) - \mathrm{ctg}( {}^{\pi}/_{7})$
5. $\cos\ (\alpha + \beta) - \cos\ (\alpha - \beta)$
6. $\sin\ (\alpha - \beta) + \sin\ (\alpha + \beta)$
7. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$
8. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$

II. Упростить выражение:

1. $\frac{\sin 35+\sin 85}{\cos 25}$
2. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha- \cos\beta}$

3. $\frac{\cos 24 - \cos 84}{\sin 54}$
4. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

III. Преобразовать в произведение:

1. $\sin 2\alpha - \sin 8\alpha$
2. $\cos 3x + \cos 8x$
3. $tg15 + tg17$

$tg\, {}^{5\pi}/_{12} - tg\, {}^{\pi}/_{12}$

4. $tg3\alpha + tg4\alpha$
5. $ctg2\alpha - ctg3\beta$
6. $ctg55 - ctg15$
7. $tg3x + tgx$

**В**

I. Преобразовать в произведение:

1. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
2. $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$
3. $\sin\left(2\alpha - {}^{\pi}/_{3}\right) - \sin\left(2\alpha - {}^{\pi}/_{6}\right)$
4. $ctg(45 - \alpha) - ctg(45 + \alpha)$
5. $tg(x + y) - tg(x - y)$
6. $tgx - tg(x - 60)$
7. $\sin\left({}^{\pi}/_{6} + \alpha\right) + \sin\left({}^{\pi}/_{6} - \alpha\right)$
8. $\cos\left({}^{\pi}/_{3} - \alpha\right) + \cos\left({}^{\pi}/_{3} + \alpha\right)$
9. $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$
10. $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} \times \frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = ctg\alpha$
11. $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$

II. Вычислить:

1. $\sin {}^{\alpha}/_{2}, \cos {}^{\alpha}/_{2}, tg\, {}^{\alpha}/_{2}$, если $\cos\alpha = {}^{1}/_{2}$, ${}^{\pi}/_{2} < \alpha < \pi$
2. $tg\, {}^{\alpha}/_{2}$, если $\sin\alpha = {}^{4}/_{5}$, ${}^{\pi}/_{2} < \alpha < \pi$
3. $tg\, {}^{\alpha}/_{2}$, если $\cos\alpha = -{}^{4}/_{5}$, $\pi < \alpha < {}^{3\pi}/_{2}$

4. $\operatorname{tg} \alpha/2$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$
5. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha/2 = 2$
6. $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha/2 = 3$
7. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha/2 = \sqrt{3}$
8. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha/2 = -\sqrt{2}$
9. $\frac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}$, если $\operatorname{tg} \alpha/2 = 3$

## III. Преобразовать в произведение:

1. $0{,}5 + \cos\alpha$
2. $1 + \operatorname{tg}\alpha$
3. $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$
4. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1$
5. $1 - 2\cos\alpha$
6. $1 + 2\sin\alpha$
7. $1 - 2\sin\alpha$
8. $1 - \operatorname{tg}\alpha$
9. $1 + \operatorname{ctg}\alpha$
10. $1 - \operatorname{ctg}\alpha$
11. $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$
12. $1 - \sqrt{2}\sin\alpha$
13. $\sqrt{3} + \operatorname{ctg}\alpha$
14. $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$
15. $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$
16. $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$

## IV. Преобразовать выражения:

1. $\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha$
2. $\sin5\alpha + \sin6\alpha + \sin7\alpha + \sin8\alpha$
3. $\cos5\alpha + \cos8\alpha + \cos9\alpha + \cos12\alpha$
4. $\sin5\alpha - \sin6\alpha - \sin7\alpha + \sin8\alpha$
5. $\cos3\alpha - \cos4\alpha - \cos5\alpha + \cos6\alpha$

## V. Доказать тождества:

1. $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin \alpha/2 \sin(\alpha/2 - \pi/4)$
2. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin \alpha/2 \sin(\alpha/2 - \pi/4)$
3. $1 - 2\cos\alpha + \cos2\alpha = -4\cos\alpha\sin^2 \alpha/2$
4. $1 - 2\sin\alpha - \cos2\alpha = -4\sin\alpha\sin^2\sin(\pi/4 - \alpha/2)$
5. $\sin16 + \sin24 + \sin40 = 4\sin20\cos22\cos18$
6. $\cos16 + \sin56 + \sin50 = 4\cos25\sin53\cos28$
7. $4\sin^2 2\alpha + \cos2\alpha + \cos6\alpha = 32\sin^2\cos^4\alpha$
8. $1 + 2\cos2\alpha + 2\cos4\alpha + \cos6\alpha + \cos8\alpha + \cos10\alpha = 8\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cos4\alpha$
9. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}2\alpha} = \cos4\alpha$
10. $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin2\alpha\sin2\beta$
11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
12. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$

13. $\cos^2\alpha\,(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$

14. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\ \cos^2\beta}$

15. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\ \sin^2\beta}$

16. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 40}{\cos 2\alpha+\cos 40}=\operatorname{tg}(\alpha-20)$

17. $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

18. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$

19. $\dfrac{\sin 19-\sin 37}{\cos 65-\cos 47}=\dfrac{1}{2\sin 18}$

20. $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}\alpha$

21. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}{}^{3\alpha}/_{2}}{\operatorname{tg}{}^{\alpha}/_{2}}$

## П.3 Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

### А

I. Преобразовать в сумму:

1. $\sin 2x\cos x$
2. $\cos 2x\cos x$
3. $\sin 3x\sin 5x$
4. $\cos 5x\cos 2x$
5. $\sin(x+y)\sin(x-y)$
6. $\cos(x+y)\sin(x-y)$

**В**

I. Преобразовать в сумму:

1. $\cos {}^{x}/_{2} \cos {}^{x}/_{3} \cos {}^{x}/_{4}$
2. $\cos {}^{x}/_{2} \cos {}^{y}/_{2} \cos \frac{x+y}{2}$
3. $\sin\left({}^{\pi}/_{4} + x\right) \sin\left({}^{\pi}/_{4} - x\right)$
4. $4\cos\left({}^{\pi}/_{12} - x\right) \cos\left({}^{\pi}/_{12} + x\right)$
5. $4\cos\left({}^{\pi}/_{4} - x\right) \cos\left({}^{\pi}/_{12} - x\right)$
6. $4\cos\left({}^{\pi}/_{6} + x\right) \sin\left({}^{\pi}/_{3} - x\right)$
7. $2\sin {}^{\pi}/_{8} \sin {}^{\pi}/_{5}$
8. $2\cos(2x + y)\cos(x - 3y)$
9. $2\cos\cos(x + 3)$
10. Sin15 sin30
11. Sin6α cos4α
12. Sin48 sin74
13. Sin (60 + α) sin (60 − α)
14. $\mathrm{Sin}\left({}^{\pi}/_{6} + \alpha\right) \sin\left({}^{\pi}/_{6} - \alpha\right)$

II. Представить в виде суммы первых степеней $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^4 x$.

Преобразовать в сумму:

1. 4sin10 cos8 cos6
2. 4sin25 cos15 sin5
3. 4sin12 sin14 sin16
4. $\sin\alpha \sin\beta\ (\alpha + \beta)$
5. $\sin\alpha \sin2\alpha \sin3\alpha$
6. 2cos25 cos35 cos15

III. Упростить выражения:

1. $2\sin 10 \sin 40 + \cos 50$
2. $2\cos 20 \cos 40 - \cos 20$
3. $2\cos\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$
4. $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \sin 3\alpha$
5. $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \pi/4\right)\sin\left(\alpha - \pi/4\right)$
6. $\sin\alpha - 2\sin\left(\alpha/2 - 30\right)\cos\left(\alpha/2 - 30\right)$

## IV. Доказать тождества:

1. $\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 4\alpha \sin\alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$
2. $\cos\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha \cos\alpha + 2\cos\alpha = \cos 2\alpha \cos 3\alpha$
3. $1 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha - 2\cos 6\alpha = -\dfrac{\cos 7}{\cos\alpha}$
4. $\cos 35 + \cos 125 + 2\sin 185\,(\sin 130 + \sin 140) = 0$
5. $\sin 1 + \sin 91 + 2\sin 203\,(\sin 112 + \sin 158) = 0$

# § 3 Основные свойства тригонометрических функций.

## А

I. Проверьте функцию на четность:

1. $f(x) = 2\sin x$
2. $f(x) = 3\cos x$
3. $f(x) = \sin 2x$
4. $f(x) = \cos x/2$
5. $f(x) = 2\mathrm{tg}3x$
6. $f(x) = \mathrm{ctg}x\left(x + \pi/6\right)$
7. $f(x) = 2\cos x + 1$
8. $f(x) = x^2 + 1{,}5\cos 2x$

II. Найдите главный период функции:

1. $f(x) = 1/2 \sin x$
2. $f(x) = 2\sin\left(x + \pi/4\right)$
3. $f(x) = \cos 2x$
4. $f(x) = 2\cos x/3$
5. $f(x) = \sin\left(2x + \pi/6\right)$
6. $f(x) = \mathrm{tg}\left(x/2 - \pi/3\right)$
7. $f(x) = 2\mathrm{ctg}3x$
8. $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

III. Найти область определения функции:

1. $f(x) = \sin(3x - 4)$
2. $f(x) = 2\cos\left(x/2 - \pi/7\right)$
3. $f(x) = 1\cos x - 2$
4. $f(x) = 5x/\sin 2x + 3$
5. $f(x) = \mathrm{tg}2x$
6. $f(x) = \mathrm{ctg}3x$
7. $f(x) = 1/\sin x$
8. $f(x) = 1/\cos x$

## IV. Найти множество значений функций:

1. $f(x) = \sin x + 1$
2. $f(x) = 2\cos x$
5. $f(x) = 1 - \sin x$
6. $f(x) = |\cos x|$

3. $f(x) = -4\sin x$
4. $f(x) = -\,{}^{1}\!/_{2}\,\cos x + 1$
7. $f(x) = |\sin x|$
8. $f(x) = 2\sin\left(x + {}^{\pi}\!/_{6}\right) + 2$

V. Найти нули функции y = f(x), промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности.

1. $f(x) = \cos 2x$
2. $f(x) = \cos\left(x + {}^{\pi}\!/_{6}\right)$
3. $f(x) = 2\cos x$
4. $f(x) = -\,2\cos\left(x - {}^{\pi}\!/_{4}\right)$
5. $f(x) = \sin {}^{x}\!/_{2}$
6. $f(x) = -\sin\left(x + {}^{\pi}\!/_{4}\right)$
7. $f(x) = {}^{1}\!/_{2}\sin 2x$
8. $f(x) = 3\sin y = \cos 2$
9. $f(x) = \mathrm{tg}\,2x$
10. $f(x) = \mathrm{ctg}\,3x$

VI. Построить графики функций:

1. $y = 3\sin x$
2. $y = 2\cos x$
3. $y = \cos\left(x + {}^{\pi}\!/_{3}\right)$
4. $y = \sin\left(x - {}^{\pi}\!/_{6}\right)$
5. $y = \cos 2x$
6. $y = \sin {}^{x}\!/_{2}$
7. $y = \mathrm{tg}\left(x + {}^{\pi}\!/_{4}\right)$
8. $y = \mathrm{tg}\,{}^{x}\!/_{2}$
9. $y = -\,{}^{1}\!/_{3}\sin x$
10. $y = \cos {}^{x}\!/_{2}$
11. $y = -\,2\cos 2x$

**B**

I. Найти главный период функции:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$
2. $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$
3. $f(x) = \sin 2x + \cos 4x$
4. $f(x) = {}^{1}\!/_{2}\cos 3x - 5\sin 2x$
5. $f(x) = \sin {}^{3x}\!/_{2}\cos {}^{3x}\!/_{2}$
6. $f(x) = \sin^2\left(2x - {}^{\pi}\!/_{6}\right) - \cos^2\left(2x - {}^{\pi}\!/_{6}\right)$
7. $f(x) = -\,{}^{1}\!/_{3}\cos\left({}^{2x}\!/_{3} - 4\right) + 1$
8. $f(x) = {}^{2}\!/_{7}\sin\left({}^{5x}\!/_{3} - \sqrt{3}\right) - 4$

II. Проверить функцию на четность:

1. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{2 + \sin 3x}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{2\sin {}^{x}\!/_{2}}{1 + \cos 3x}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - 2\sin 3x}$
5. $f(x) = 2\sin 4x - 3\cos 2x$
6. $f(x) = 4\mathrm{tg}x - 2\cos 3x$
7. $f(x) = (x^2 - x^4)\sin {}^{x}\!/_{3}$
8. $f(x) = |x|\left(\cos 2x - {}^{\pi}\!/_{6}\right)$

III. Найти область определения функции:

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\mathrm{ctg}x}$
8. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}x}$

3. $f(x) = tg4x$
4. $f(x) = \frac{1}{ctg2x}$
5. $f(x) = \frac{1}{sinx^2}$
6. $f(x) = \frac{tgx}{sinx}$
9. $f(x) = \frac{1}{sinx - cosx}$
10. $f(x) = \frac{1}{cos^2x + cosx}$
11. $f(x) = \frac{ctgx}{sinx - cosx}$
12. $f(x) = \frac{1}{(cosx + sinx)^2}$

IV. При каких значениях аргумента принимают наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $f(x) = \sin(x - 1)$
2. $f(x) = \cos\left(x - \pi/3\right)$
3. $f(x) = 3\sin2x$
4. $f(x) = 1/2\cos3x$
5. $f(x) = 4 + \sin\left(x - \pi/6\right)$
6. $f(x) = 6 - \sin^2x$
7. $f(x) = 2 - 3|sinx|$
8. $f(x) = sinx + cosx$
9. $f(x) = \sqrt{3}\,sinx - cosx$
10. $f(x) = \sqrt{3}\,cosx + sinx$

V. Имеют ли наибольшее или наименьшее значения функции:

1. $y = tgx$ , 2$y = |tgx|$ , 3$y = tg^2x$ ,

VI. Найти множество значений функции $y = f(x)$

1. $f(x) = |cos2\,x|$
2. $f(x) = |1/2\sin\left(x + \pi/6\right)|$
3. $f(x) = |sin3x - 1|$
4. $f(x) = cos|x|$
5. $f(x) = -\sin|x|$
6. $f(x) = |\,1/2\cos\left(x + \pi/6\right)| - 2$
7. $f(x) = |-4\sin x/2\,| + 1$
8. $f(x) = 5 - 2\,sinx$
9. $f(x) = 3 - 1/2\cos2\,x$

VII. Построить графики функций:

1. $y = |sinx|$
2. $y = cos|x|$
3. $y = 2\cos\left(2x - \pi/6\right)$
4. $y = -\sin\left(x/2 + \pi/3\right)$
5. $y = \sin^2x$
6. $y = \cos^2x$
7. $y = |-1/2\sin\left(x + \pi/6\right)| +$ 1Место для формулы.
8. $y = -3\cos\left(x/2\right) + 1$

VIII. Найти нули функции, промежутки монотонности и знакопостоянства:

1. $y = 2cos3x + 1$
2. $y = -\sin\left(x/2 + \pi/4\right)$
3. $y = 1/2\sin\left(2x - \pi/3\right)$
4. $y = \sin(3x - 4)$
5. $y = tg\left(x/2 - \pi/3\right)$
6. $y = 3\cos\left(x/2 + \pi/6\right)$

## § 4 Аркфункции.

**А**

I.

1. Может ли арксинус числа принимать значения:

$\pi/2$ , $\pi/3$ , $2\pi/3$ , $-\pi/4$ , $-\pi$ , $5\pi/6$ , $\sqrt{2}$ , $\sqrt{3}$ , $\sqrt{2}/2$ , $-\sqrt{3}/2$

2. Может ли арккосинус α принимать значения:

$\pi/4$ , $\pi/3$ , $-\pi/3$ , $0$ , $1/2$ , $5\pi/6$ , $2\pi$ , $-\pi/2$ , $\sqrt{2}$ , $-\sqrt{3}$

3. Может ли arctg α принимать значения:

$\pi/7$ , $0$ , $2\pi/9$ , $-3\pi/4$ , $-3\pi/8$ , $\sqrt{5}$ , $9\pi/20$ , $11\pi/20$

II. При каких значениях α имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2\alpha + 1)$
2. $\arcsin(3 - 4\alpha)$
3. $\arccos(2 + 3\alpha)$
4. $\arccos(3\alpha - 1)$
5. $\mathrm{arctg}\,(5\alpha - 2)$
6. $\mathrm{arctg}\,(2\alpha + 4)$

III. Вычислите:

1. $\arcsin \sqrt{2}/2 + \arccos \sqrt{2}/2$

2. $\arcsin\left(-\ {}^{1}\!/_{2}\right) + \arccos\left(-\ {}^{1}\!/_{2}\right)$
3. $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1)$
4. $\arcsin 1 + \arccos 1 + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$
5. $\arcsin(-1) + \arccos(-1)$
6. $\arcsin 0 + \arccos 0$
7. $\arcsin 0 + \arcsin 1 + \arcsin(-1)$
8. $\arccos 0 + \arccos 1 + \arccos(-1)$

IV. Проверьте справедливость равенства:

1. $\arcsin\left(-\ {}^{1}\!/_{2}\right) = -\ {}^{\pi}\!/_{6}$
2. $\arcsin\ {}^{\sqrt{2}}\!/_{2} = {}^{\pi}\!/_{4}$
3. $\arccos\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2} = {}^{\pi}\!/_{6}$
4. $\arccos {}^{\sqrt{2}}\!/_{2} = {}^{3\pi}\!/_{4}$
5. $\operatorname{arctg} 1 = {}^{\pi}\!/_{4}$
6. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = {}^{\pi}\!/_{4}$
7. $\operatorname{arctg}\left(-\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{3}\right) = {}^{\pi}\!/_{6}$
8. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\ {}^{2\pi}\!/_{3}$

**B**

I. Вычислить:

1. $\operatorname{tg}\left(\arccos\ {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}\right)$
2. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\right)$
3. $\sin\left(\arccos\ {}^{1}\!/_{2}\right)$
4. $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$
5. $\cos\left({}^{1}\!/_{2}\ \arcsin\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\right)$
6. $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\ {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\right)$
7. $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}\right)$
8. $\operatorname{tg}(2\arccos(-1)$
9. $\cos(2\operatorname{arctg}(-1)$
10. $\sin\left(2\arcsin(-\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\right)$

II. Вычислить:

1. $\cos\left(\arccos\left(-\ {}^{1}\!/_{2}\right) + \ {}^{\pi}\!/_{3}\right)$
2. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\ {}^{1}\!/_{\sqrt{3}}\right) + \ {}^{\pi}\!/_{6}\right)$
3. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{3} - {}^{1}\!/_{4} \arcsin\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\right)$
4. $\cos\left(3\arcsin\ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\ + \arccos\left(-\ {}^{1}\!/_{2}\right)\right)$
5. $\operatorname{cin}\left(\arcsin\ {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}\ + 2\operatorname{arctg} 1\right)$
6. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin\ \ {}^{1}\!/_{2}\right)$

7. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right) + \arccos(-1/2) + \operatorname{arctg}1\right)$

## III. Найти область определения функции:

1. $y = \arcsin(x + 1)$
2. $y = \arcsin\left(x + \pi/2\right)$
3. $y = \arcsin 1/2\ x$
4. $y = \arcsin\sqrt{x}$
5. $y = \arcsin\sqrt{1 - x}$
6. $y = \arccos(x - 2)$
7. $y = \arccos(x - \pi)$
8. $y = \frac{\pi}{x+4}$
9. $y = \arccos\frac{2}{3x}$
10. $y = \arccos\sqrt{x}$
11. $y = \arccos\sqrt{2 - x}$
12. $y = \operatorname{arctg}(4 - x)$
13. $y = \operatorname{arcctg}(5 - x)$
14. $y = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{x+4}$

## IV. Найти область значений функции:

1. $y = 4 + 2\arccos x$
2. $y = 2\arccos x + \pi$
3. $y = \arcsin x - 2$
4. $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$
5. $y = \arccos\sqrt{x} - 2$
6. $y = \sqrt{\arcsin x}$
7. $y = \sqrt{\arccos x}$
8. $y = \frac{1}{\arcsin x}$
9. $y = \frac{1}{\arccos x}$
10. $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$
11. $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$

## V. Решить неравенство:

1. $\arcsin x < \pi/2$
2. $\arcsin x \geq -\pi/2$
3. $\arccos x \leq 0$
4. $\arccos x > 0$
5. $\arccos x < \pi$
6. $\arcsin x \geq \pi/2$

## VI. Решить уравнения:

1. $\sin(\arcsin x) = 1/2$
2. $\cos(\arccos x) = \sqrt{3}/2$
3. $\cos(\arccos x) = 1/4$
4. $\sin(\arcsin x) = 3x + 2$
5. $\sin(\arcsin 2x) = x + 1$
6. $\cos(\arccos(x+1)) = 2x$
7. $\cos(\arccos(x-1)) = x-1$
8. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2x) = 5$

## VII. Вычислить:

1. $\arcsin\left(\sin\pi/9\right)$
2. $\arccos\left(\cos 2\pi/7\right)$
3. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 5\pi/12\right)$
4. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} 7\pi/11\right)$
5. $\arccos(\cos 3)$
6. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$
7. $\arccos\left(\cos 11\pi/8\right)$
8. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 10\pi/11\right)$
9. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} 17\pi/12\right)$
10. $\arcsin(\sin 3)$
11. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}5)$
12. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}15)$

## VIII. Решить уравнение:

1. $\arcsin x = \pi/3$
7. $\arccos(2x - 3) = \pi/2$

2. $\arcsin x = \pi/4$
3. $\operatorname{arctg} x = \pi/6$
4. $\operatorname{arcctg} x = \pi/4$
5. $\arccos x = -\pi/3$
6. $\operatorname{arcctg} x = -\pi/3$
8. $\operatorname{arctg}(2x-5) = -\pi/6$
9. $\operatorname{arctg}(2-x) = 2\pi/3$
10. $3\arcsin 2x = -\pi/4$
11. $7\arccos(2-5x) - 4 = 0$
12. $4\arcsin(5-2x) + 11 = 0$

IX. Построить графики функций:

1. $y = \arccos(x-2)$
2. $y = \arcsin(x+1)$
3. $y = \arccos x - \pi/6$
4. $y = \arcsin x + \pi/4$
5. $y = \operatorname{arctg} x + \pi/2$
6. $y = \arccos(-x)$
7. $y = \arcsin(-x)$
8. $y = 2\arcsin x$
9. $y = 1/2 \arccos x$
10. $y = \arcsin 2x$
11. $y = -\arccos x/2$

X. Построить графики функций:

1. $y = \arcsin|x+1|$
2. $y = \arccos|x-1|$
3. $y = -2\arcsin|x-2|$
4. $y = |\arcsin(x-1)|$
5. $y = |\arcsin x|$
6. $y = |\arccos|x||$

## § 5 Простейшие тригонометрические уравнения.

**А**

I. Решите уравнения:

1. $\sin 2/5\, x = -1/2$
2. $\sin 3/4\, x = -\sqrt{3}/2$
3. $\sin 3x = 1/5$
4. $\sin x/4 = 7/6$
5. $\sin \pi x = 1$
6. $\cos\left(x + \pi/6\right) = \sqrt{2}/2$
7. $\cos 3x/2 = -\sqrt{3}/2$
8. $\cos\left(\pi/3 - x\right) = 1$
9. $\cos\left(\pi/6 + 2x\right) + \sqrt{2}/2 = 0$
10. $\cos \pi x = 0$
11. $\operatorname{tg} 3/4\, x = 0$
12. $\operatorname{tg}\left(3x - \pi/3\right) + \sqrt{3} = 0$
13. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(x/3 + \pi/4\right) + 3 = 0$
14. $\operatorname{ctg} x/\pi = -1$
15. $\operatorname{ctg}\left(\pi/6 - 2x\right) = 0$

**В**

I. Решите уравнения:

1. $\sin 2\pi/x = \sqrt{3}/2$
3. $\operatorname{tg} \pi/x = \sqrt{3}$

2. $\cos {}^{2\pi}/_{x} = -\,{}^{\sqrt{2}}/_{2}$

4. $\operatorname{ctg} {}^{2\pi}/_{3x} = 1$

II. Решите уравнения:

1. $\sin \pi x^2 = 0$
2. $\sin x^2 = {}^{\pi}/_{2}$
3. $\cos x^2 = {}^{1}/_{2}$
4. $\operatorname{tg} \pi x^2 = 0$
5. $|\sin x| = 1$
6. $|\sin x^2| = 1$
7. $\cos \frac{2\pi}{x^2} = -\,{}^{1}/_{2}$

III. Решите уравнения:

1. $\frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1$
2. $\cos \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1$
3. $\cos \frac{\pi(x^2+1)}{x^2+9} = {}^{1}/_{2}$
4. $\operatorname{tg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1$
5. $\sin \frac{2\pi x}{1+x^2} = 0$

## § 6 Решение тригонометрических уравнений с помощью замены переменной.

### А

I.

1. $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$
2. $\cos^2 x + \cos x = 6$
3. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
4. $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$
5. $1 + \cos x = 2\sin^2 x$
6. $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$
7. $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$
8. $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$
9. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$
10. $\cos 2x + 3\sin x = 2$
11. $3\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 4 = 0$
12. $5\sin x - \cos 2x + 3 = 0$
13. $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$
14. $4 - 2\sin^2 x - 5\cos x = 0$

### В

I.

1. $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$
2. $\sin 4x - 3\cos 8x = 2$
3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$
4. $2\sin^2 {}^{x}/_{2} - 7\cos {}^{x}/_{2} - 5 = 0$
5. ${}^{1}/_{2}\operatorname{ctg}^2 3x + \sqrt{3}\operatorname{ctg} 3x + 1 = 0$

6. $1 + 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\ \sin x + \cos 2x = 0$
7. $2\cos^4 3x - 3\cos^2 3x + 1 = 0$
8. $2\cos^2\left(2x + {}^{\pi}/_{3}\right) - \sin^2\left(x + {}^{\pi}/_{6}\right) = 2$
9. $4\sin^2 {}^{x}/_{2} - \cos {}^{x}/_{2} = 3{,}5$
10. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2}\sin(5x + 6) = 4$
11. $2\sin\left({}^{\pi}/_{2} + x\right) - 5\cos(\pi - x) + 2 = 0$
12. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$
13. $1 + \cos 4x = \cos 2x$
14. $8\sin^2 x + 6\cos\left({}^{3\pi}/_{2} - x\right) - 5 = 0$
15. $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$
16. $5(1 + \cos x) = 2\sin {}^{\pi}/_{2} + \sin\left({}^{3\pi}/_{2} + 2x\right)$
17. $\cos x - {}^{1}/_{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}x = 0$
18. $2\cos^4 x + 1 = 3\cos 2x$
19. $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$
20. $8\sin\left({}^{\pi}/_{2} + 2x\right) + 3\sin(\pi - x) = 2\cos 4\pi$
21. $2\cos^2\left({}^{\pi}/_{2} + x\right) + 5\cos x = \sin {}^{3\pi}/_{2} - \cos {}^{3\pi}/_{2}$
22. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$

## § 7 Уравнения, решаемые с помощью формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

### A

1. $\sin x + \sin 2x = 0$
2. $\sin 5x = \sin 3x$
3. $\cos 6x + \cos 4x = 0$
4. $\sin {}^{x}/_{2} + \sin x = 0$
5. $\sin\left({}^{\pi}/_{6} + x\right) = \sin\left({}^{\pi}/_{6} - x\right)$
6. $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$
7. $\sin x + \sin 5x = \sin 3x + \sin 7x$
8. $\cos\left(x - {}^{\pi}/_{3}\right) - \cos\left(2x + {}^{\pi}/_{3}\right) = 0$
9. $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x = 0$
10. $\cos 5x + \cos 7x = 2\cos 2x$

### B

1. $\cos 5x = \cos 4x$
2. $\sin\left({}^{\pi}/_{12} + x\right) + \sin\left({}^{\pi}/_{4} - x\right) = 1$
3. $\cos\left(x - {}^{\pi}/_{3}\right) - \cos\left(x - {}^{\pi}/_{6}\right) = \sin\left(x - {}^{\pi}/_{4}\right)$

4. $\sin\left(x - \pi/6\right) - \sin\left(x + 2\pi/3\right) = \cos\left(x + \pi/4\right)$
5. $\sin(15 + x) + \cos(45 + x) + 0{,}5 = 0$
6. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x = \cos 9x$
7. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
8. $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$
9. $\cos 5x + \cos 7x + 2\sin^2 x = 2\cos^2 x$
10. $\cos\left(\pi/2 + 3x\right) + \sin x = 2\cos 2x$
11. $\sin x = \cos 3x$
12. $\sin 3x + \cos 11x = 0$
13. $\sin 4x + \cos 10x = 0$
14. $\sin\left(2x - \pi/3\right) + \cos\left(2x - \pi/6\right) = \sqrt{3}/2$
15. $\sin\left(3x - 2\pi/3\right) + \cos\left(3x + \pi/6\right) = -1$
16. $\sin\left(x - \pi/6\right) - \sin\left(x + 2\pi/3\right) = \cos\left(x + \pi/4\right)$
17. $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$
18. $4(\sin 4x - \sin 2x) = \sin x\,(4\cos^2 3x + 3)$
19. $\sin\left(x + \pi/6\right) - \sin\left(x - \pi/6\right) = 1/2$

## §8 Уравнения, решаемые методом введения вспомогательного угла.

### A

I. Решить уравнения:

1. $\sin x + \cos x = 1$
2. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
3. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -2$
4. $\sin x/2 + \cos x/2 = \sqrt{3}$
5. $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$
6. $\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 1$
7. $\sin x - 3\cos x = 2$

II. Найти область значений функций y = f(x):

1. $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$
2. $f(x) = 2\sin x - 2\cos x$
3. $f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x$

### B

I. Решить уравнения:

1. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$
2. $\sqrt{3}\sin x/2 - \cos x/2 - \sqrt{2} = 0$

3. $\sqrt{2}\cos 3x = \sqrt{2}\sin 3x - \sqrt{3}$
4. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$
5. $\sin\left(x + \pi/6\right) + \cos\left(x + \pi/6\right) = \sqrt{2}$
6. $\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x$
7. $\sqrt{3}\sin x - \sin x = 2\cos 3x$
8. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos 5x$
9. $\cos x = \sin x - 1$
10. $2\sin x + 7\cos x = \sqrt{53}/2$
11. $3\sin x - 4\cos x = 2$
12. $5\sin x - 12\cos x = 13$
13. $\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{5}$
14. $2\sin x/2 - 3\cos x/2 = 0{,}8$
15. $\sin 3x + \sqrt{3}/2\,\sin 2x = 1/2\,\cos 2x$
16. $\sin(\pi - 6x) + \sqrt{3}\sin\left(\pi/2 + 6x\right) = \sqrt{3}$
17. $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$
18. $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\cos 5x$
19. $\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}\sin 11x$
20. $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 2\cos 7x$
21. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x\sin x + 1 = 0$
22. $2\cos^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

## §9 Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени.

### A

1. $4\sin^2 x + 7\cos 2x = 1$
2. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$
3. $\cos 2x - 2\sin^2 3x = 0$

### B

I. Решить уравнения:

1. $\sin^2 2x + \sin x = 1$
2. $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$
3. $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$
4. $\sin^4 x/2 + \cos^4 x/2 = 1$
5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x\cos x$

6. $\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$
7. $6\sin^2 3x + \cos 12x = 1$
8. $2\sin^2 x + 2\sin^2 2x + 2\sin^2 3x = 3$
9. $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^2 x = 2$
10. $4\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = \cos 8x$
11. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$
12. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$
13. $\sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{6}$
14. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 x \cos^2 x$
15. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$
16. $2\cos^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 2$
17. $2\sin^2 2x + \cos 4x = 0$
18. $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x$
19. $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$
20. $\cos^2 2x + \cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

## §10 Однородные уравнения и сводимые к однородным.

**A**

I. Решить уравнения:

1. $\sin x + \cos x = 0$
2. $\sin x - \cos x = 0$
3. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$
4. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$
5. $\cos x + 3\sin x = 0$
6. $3\sin x - 2\cos x = 0$
7. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$
8. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$
9. $\sin^2 2x - 4\sin 2x\cos 2x + 2\sin^2 8x = 0$
10. $3\sin^2 2x + 2\sin x\cos x = 2$
11. $2\sin^2 x + 3\sin^2 x + 5\sin x\cos x = 0$
12. $\sin^2 3x + \sin 3x\cos 3x - 2\cos^2 3x = 0$

II. Решить уравнения:

1. $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x = 2$
2. $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$
3. $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$
4. $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$
5. $\cos^2 x + 2\sin 2x = 2$
6. $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$

**B**

I. Решить уравнения:

1. $7\sin 3x = 3\cos 3x$
2. $5\sin x + \cos x = 0$
3. $\cos(x + 30) - \sin(x + 30) = 0$
4. $2\sin\left(x - \pi/4\right) + 5\cos\left(x - \pi/4\right) = 0$
5. $2\sin^2 x + 3\cos^2 x + 5\sin x \cos x = 0$
6. $4\cos^2 x + 0{,}5 \sin 2x + 3\sin^2 x = 3$
7. $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$
8. $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 1$
9. $4\cos^2 x + \sin^2 x = 1 + 1{,}5\sin 2x$
10. $\sin^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$
11. $\cos^2 4x + 7\sin^2 4x = 4\sin 8x$
12. $\sin 2x + \sin^2 x = 4\cos^2 x$
13. $\sqrt{3} \sin^2 2x + \left(\sqrt{3} - 1\right) \sin 2x \cos 2x = \cos^2 2x$
14. $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 5\cos^2 x - \sin 2x$
15. $\sqrt{3} \cos^2 x = 0{,}5 \sin 2x$
16. $\sin^2 x - {1}/{\sqrt{3}} \sin x \cos x = {1}/{2}$
17. $6\sin^2 x - 1{,}5\sin 2x - 5\cos^2 x - 2 = 0$
18. $22\sin^2 5x - 3\sin 10x + 10\cos^2 5x = 10$

II. Решить уравнения:

1. $\sin^3 3x - 4\sin^2 3x \cos 3x + 3\sin 3x \cos^2 3x = 0$
2. $\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin x \cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$

## §11 Использование универсальной подстановки в решении уравнений.

**B**

1. $6\sin x + 8\cos x = 5$
2. $\sin x + 5\cos x + 5 = 0$
3. $\sin x - \sqrt{2} \cos x = 3$
4. $4\sin x - 6\cos x = 1$
5. $1 + \cos x + \cos {x}/{2} = 0$
6. $\sin 2x + \mathrm{tg} x = 2$
7. $\sin 2x + \mathrm{tg} x = 0$
8. $2 + \sin x = 3\mathrm{tg} {x}/{2}$
9. $2\cos x + \sin x = -2$

10. $\sin x + \sqrt{2}\cos x = 3$

11. $\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$

12. $\sin x + 5\cos x + 5 = 0$

13. $(\cos x - \sin x)\left(2\operatorname{tg} x + {}^{1}/_{\cos x}\right) + 2 = 0$

14. $1 - \cos 2x + \sin x = 1$

## §12 Уравнения, имеющие посторонние корни.

I. Решить уравнения:

1. $\frac{\sin x}{2+\pi} = 0$
2. $\frac{\cos x}{x - {}^{\pi}/_{2}} = 0$
3. $\frac{\sin \pi x}{x-1} = 0$
4. $\frac{\cos \pi x}{x - {}^{1}/_{2}} = 0$
5. $\frac{\sin x - \cos x}{4x-\pi} = 0$
6. $\frac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$
7. $\frac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0$
8. $\frac{\cos 2x - 5\sin x - 3}{6x^2 - 5\pi x - \pi^2} = 0$

I. Решить уравнения, переходя к равносильной системе:

1. $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$

2. $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$

3. $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$

4. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$

5. $\frac{\sin^2 x+\sin x}{1+\cos x}=0$

6. $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=0$

7. $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$

8. $\frac{\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}=0$

III. Решить уравнения:

1. $\sqrt{x-2}\times\sin\pi x=0$
2. $\sqrt{3-x}\times\cos\pi x=0$
3. $\sqrt{x+4}\times\operatorname{ctg}3x=0$
4. $\sqrt{7-x}\times\operatorname{ctg}2x=0$
5. $\frac{\cos 4x}{\sqrt{x^2-6}}=0$
6. $\frac{\sin 2\pi x}{\sqrt{x-3}}=0$
7. $\frac{\sin 2\pi x}{\sqrt{x-3}}=0$
8. $\sqrt{1-x^2}\,(\cos\pi x-\sin\pi x)=0$
9. $\sqrt{4-x^2}\,(\cos\pi x+\sin\pi x)=0$

VI. Решить уравнения:

1. $\sqrt{\sin x}\times\cos x=0$
2. $\sqrt{\cos x}\times\sin x-0$
3. $\sqrt{\sin x}\times\sin 2x=0$
4. $\sqrt{\sin x}\times\cos 2x=0$

V. Решить уравнения:

1. $\sqrt{1-\cos 2x}=-\sqrt{2}\cos x$
2. $\sqrt{1-\sin x}=\cos x$
3. $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$
4. $\sqrt{\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x$
5. $\sqrt{-\cos 2x}=-\sqrt{2}\cos x$
6. $\sqrt{{}^{1}/_{3}\sin x}=-\cos x$
7. $\sqrt{{}^{3}/_{2}\cos x}=-\sin x$

8. $\sqrt{3\cos 2x - 1} = \sqrt{2}\sin x$

9. $\sqrt{3\cos 2x - 1} = \sqrt{2}\cos x$

10. $\sqrt{1 - 2\cos^2 x} = \cos x + \sin x$

11. $\sqrt{2\sin^2 x - 1} = \cos x - \sin x$

## §13 Решение уравнений, содержащих дополнительные условия.

### A

I.Решить уравнения и указать корни, расположенные на заданных промежутках:

1. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, x \in [-\pi/2; \pi]$
2. $2\cos^2 x + \sin x \cos x = 0, x \in [-\pi/3; \pi/4]$
3. $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 1, x \in [0; 3\pi/2]$
4. $2\cos^2 x/2 + \cos 2x = 0, x \in [-\pi/4; \pi]$

II. Решить уравнения и указать число решений, принадлежащих заданному промежутку.

1. $3\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0, \ x \in [-\pi/3; \pi/2]$
2. $\cos 4x + \sin 4x = 1, x \in [0; 2\pi]$
3. $\mathrm{ctg}5x - \mathrm{ctg}2x = 0, x \in [\pi/2; 2\pi]$
4. $2\cos^2 x - \sin x = 0, x \in [\pi/2; \pi]$

### B

I. Решить уравнения и найти корни, расположенные на заданном промежутке:

1. $\sin x\,(2\sin^2 x - 1) + \cos^2 2x = 0, x \in [-\pi/2; \pi/2]$
2. $\sin x + \cos^2 x = 1/4, x \in [\pi; 3\pi/2]$
3. $3\sin^2 x + \sin^2 2x = 2, x \in [-\pi/2; \pi]$

4. $\sin x - 3\cos 3x + \sin 7x = 0,\ x \in [\pi/4;\ 7\pi/4]$
5. $\sin x + \cos x = 1,\ x \in [0; \pi]$
6. $\cos x \cos 2x = \cos 3x,\ x \in [-2\pi/3; \pi/3]$
7. $3\cos x + 4\sin x = 5\sin 3x,\ x \in [0;\ \pi/2]$
8. $\sqrt{1 - \sin x} = -\cos x,\ x \in [0; 2\pi]$
9. $\sqrt{1 - \sin x} = -\sin x,\ x \in [0; 2\pi]$

II. Найти сумму корней уравнения на отрезке:

1. $\sin^4 x/2 + \cos^4 x/2 = 1$ на $[0;\ 315]$
2. $5\cos 2x + 12\sin x - 5 = 0$ на $[0;\ 157]$

III. Решить уравнения, в ответе указать число корней, принадлежащих заданному промежутку:

1. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x,\ x \in [0; \pi]$
2. $1 + \sin x = 2\cos x + \sin 2x,\ x \in [0; 2\pi]$
3. $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x,\ x \in [0; 4\pi]$
4. $\sin 3x = \sin 2x + \sin x,\ x \in [\pi/2; 2\pi]$
5. $\sqrt{2}\ \sin 3x = \sin 2x + \cos 2x,\ x \in [-\pi/2;\ \pi/2]$
6. $\sin 3x = 2\cos\left(3\pi/2 + x\right),\ x \in [\pi/2; 2\pi]$
7. $\sqrt{2}\ \cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0,\ x \in [0; \pi]$
8. $(\sin x + \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x,\ x \in [\pi/2; \pi]$
9. $(2\cos x - \sin x)\left(\sqrt{3} + \sin x\right) = 2 + \cos^2 x,\ x \in [\pi/2; 3\pi]$
10. $4\sin^2 (1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x,\ x \in [-2; 2]$

IV. Найти наибольший отрицательный корень уравнения:

1. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$
2. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$
3. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$
4. $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1$
5. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 x/2$
6. $\sin^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 1$
7. $2\cos^2 x/2 + \cos 2x = 0$

V. Найти наименьший положительный корень уравнения.

1. $\sin 2x + \sin x = 0$
2. $\sin 4x = \sin 2x$
3. $\sin 3x = \cos x$
4. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$

5. $\mathrm{tg}7x + \mathrm{tg}3x = 0$
6. $\sin 2x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$

VI.Решить уравнения и указать корни, принадлежащие заданному отрезку:

1. $\sqrt{1-\cos x} = \sin x,\ x \in \left[\pi/4;\ 7\pi/4\right]$
2. $\sqrt{\cos x} = \sqrt{\cos 2x},\ x \in \left[3\pi/4;\ 5\pi/2\right]$
3. $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos 2x},\ x \in \left[-\pi/2;\pi\right]$
4. $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\cos x,\ x \in \left[-3\pi/2;0\right]$

VII. Решить систему. В ответе указать наибольшее решение:

1. $\begin{cases} \cos{}^{2\pi}/_{x} + 3\cos{}^{\pi}/_{x} = 1, \\ \frac{11}{4x-1} \geq 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \cos{}^{2\pi}/_{x} - 5\cos{}^{\pi}/_{x} = 2, \\ \frac{7}{6x-2} \geq 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3\sin{}^{\pi}/_{x} - 3\cos{}^{2\pi}/_{x} = 1, \\ \frac{2x+1}{2-x} > 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \cos{}^{2\pi}/_{x} + \sin{}^{\pi}/_{x} + 2 = 0, \\ 1 + \frac{9}{5x+1} \leq 0 \end{cases}$

## §14 Системы уравнений.

### A

I. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x - y = \pi/3 \\ \cos x + \cos y = 3/2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2\pi/3 \\ \cos x + \cos y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y = 60 \\ \cos x + \cos y = 1{,}5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - y = \pi/6 \\ \sin x - \cos y = 0{,}5 \end{cases}$

### B

I. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = \pi/3 \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y = -\pi/3 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}25 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = 5\pi/6 \\ \cos^2 x - \cos^2 y = 1/4 \end{cases}$

II. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x - y = \pi/3 \\ \cos x \cos y = 1/2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 3\pi/4 \\ \cos x \sin y = \sqrt{2}/2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = \pi/3 \\ \sin x \sin y = 1/4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 4\pi/3 \\ \sin x \sin y = 3/4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = \pi/12 \\ \sin x \sin y = \sqrt{6}/4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = 5\pi/6 \\ \sin x \cos y = 3/4 \end{cases}$

III. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1/2 \\ \sin y + \cos x = 1/2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin x \sin y = 3/4 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin x \sin y = \sqrt{3}/4 \\ \cos x \cos y = \sqrt{3}/4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 3/2 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1/2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 7/4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x + \cos y = 1 \\ 2\sin x - 3\cos y = \sqrt{2} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4y + \sqrt{3} \cos x = -1/2 \\ 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1 \end{cases}$

## §15 Решение тригонометрических неравенств:

**А**

I. Решить неравенства:

1. $\sin x < 1/2$
2. $\cos x \geq \sqrt{2}/2$
3. $\sin x > \sqrt{3}/2$
4. $\cos 2x < -1/2$
5. $\operatorname{tg} x/2 > \sqrt{3}$
6. $\sin\left(x + \pi/6\right) \leq -\sqrt{2}/2$
7. $2\operatorname{tg} 2x \leq -\sqrt{3}/3$
8. $\cos\left(x - \pi/4\right) \leq -\sqrt{3}/2$
9. $\operatorname{tg}\left(x - \pi/3\right) < -\sqrt{3}$
10. $\sin\left(\pi/4 - 2x\right) > 1/2$
11. $\cos\left(3x + \pi/6\right) < 1/2$
12. $\sin\left(\pi/6 - x\right) \leq -\sqrt{3}/2$
13. $\operatorname{ctg}\left(\pi/4 - x\right) \geq 1$
14. $\operatorname{tg}\left(2x - \pi/3\right) \leq -1$
15. $\cos\left(\pi/4 - x/2\right) \geq \sqrt{3}/2$
16. $2\cos 3x \leq 1$

**В**

I. Решить неравенства:

1. $\cos x > \frac{1}{3}$
2. $3\sin x - 1 > 0$
3. $\cos x \geq 1$
4. $\cos(2x - 2) > \frac{1}{2}$
5. $\sin \frac{x}{\pi} \geq 0$
6. $\sin x \cos x < 0$
7. $\sin x \cos x \geq 0$
8. $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leq -\frac{1}{2}$
9. $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
11. $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq -\frac{1}{2}$
12. $\frac{1}{4} \leq \cos x < \frac{1}{2}$
13. $-\frac{1}{2} < \cos x \leq \frac{1}{4}$
14. $1 \leq \operatorname{tg} x \leq 2$
15. $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
16. $|\cos \frac{x}{2}| > \frac{\sqrt{3}}{2}$
17. $|\cos x| > \frac{1}{5}$
18. $|\cos x| \leq \frac{2}{5}$
19. $|\sin x| > \frac{1}{2}$
20. $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
21. $|\sin 2x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
22. $|\sin \frac{x}{2}| < \frac{1}{2}$
23. $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$
24. $|\operatorname{tg} x| \geq 1$
25. $|\operatorname{tg} x| < 2$
26. $|\operatorname{ctg} x| > \sqrt{3}$
27. $|\operatorname{ctg} x| \leq 1$
28. $|\operatorname{ctg} x| \geq 3$

II. Решить неравенства:

1. $\cos^2 x \geq \frac{1}{4}$
2. $\sin^2 x < \frac{3}{4}$
3. $\cos^2 \frac{x}{2} \leq \frac{3}{4}$
4. $\sin^2 x \geq \frac{1}{4}$
5. $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$
6. $\sin x - \cos x > \sqrt{2}$
7. $\sin x - \cos x \geq 0$
8. $\sin 2x + \cos x \geq \sqrt{3}$

III. Решить неравенства:

1. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$
2. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$
3. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$
4. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$
5. $\cos^2 x - \sin x < 0$
6. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 \geq 0$
7. $2\cos^2 x - \sin x > 1$
8. $3\cos 2x + 2\cos x \geq 5$